Prépa COMMERCIA

Classes préparatoires privées
aux Grandes Écoles de Management

MATHEMATIQUES-Voie économique
Professeur : Monsieur MARIE

INTRODUCTION

Ce dossier propose un récapitulatif de certaines notions de calcul élémentaire indispensables pour suivre une première année d' ECE. Ces notions doivent être parfaitement assimilées et maitrisées. L'usage de toute calculatrice étant interdit aux concours d'entrée aux grandes écoles de commerce, il est indispensable de se familiariser avec le calcul mental en s'interdisant l'usage d'une calculatrice pour traiter les exercices.
Bonnes vacances…et bon travail !

COURS

1) Fractions

Une fraction est définie si et seulement si son dénominateur est non nul.
Une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul.
On peut simplifier une fraction par un nombre si ce nombre est non nul et s'il est factorisé au numérateur et au dénominateur de la fraction.
Pour additionner ou soustraire deux fractions, il faut les réduire au même dénominateur, c'est-à-dire trouver le plus petit multiple commun aux deux dénominateurs, puis additionner les nouveaux numérateurs obtenus.
Pour multiplier deux fractions, il faut multiplier les numérateurs et les dénominateurs entre eux.
Pour multiplier une fraction par un nombre, il faut multiplier le numérateur de la fraction par le nombre.
Pour diviser deux fractions, il faut multiplier la première par l'inverse de la seconde.

2) Puissances entières

Pour tout réel a non nul et tout entier naturel n :

$a^n = a \times a \times ... \times a$ (n facteurs) $\qquad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \qquad a^0 = 1$

Pour tous réels a et b non nuls et tous entiers relatifs n et p :

$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad \dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \qquad (a^n)^p = a^{np} \qquad (ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

3) Identités remarquables

Pour tous réels a, b, c :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad ; \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$; $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

4) Racine n-ième

a) Racine carrée

Pour tout réel a positif , on appelle racine carrée de a l'unique réel positif dont le carré vaut a.
On le note $\sqrt{a}$.
Si a ≥ 0, l'équation $x^2=a$ a deux solutions : $\sqrt{a}$ er $-\sqrt{a}$.
Si a < 0, l'équation $x^2=a$ n'a pas de solution.

Pour tous réels a et b positifs, $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ et si b est non nul, $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Attention, en général, $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$; par exemple $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ tandis que $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$

Soit a un réel : $\sqrt{a^2}=\begin{cases} a \ \ si \ \ a\geq 0 \\ -a \ \ si \ \ a<0 \end{cases}$

b) Racine n-ième $(n\geq 2)$

Soit a un réel strictement positif.

L'unique réel x tel que $x^n=a$ est appelé racine n-ième de a. On le note $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$.

Ainsi $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$

Exemple $\sqrt[3]{8}=8^{\frac{1}{3}}=2$ car $2^3=8$

5) Inégalités

Comparer deux nombres c'est étudier le signe de leur différence ; démontrer l'inégalité $a\leq b$ équivaut à démontrer $a-b\leq 0$ ou $b-a\geq 0$.
En ajoutant un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on ne change pas le sens de l'inégalité.
En multipliant les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif, on obtient une inégalité de même sens.
En multipliant les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif, on obtient une inégalité de sens contraire.
On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens.
On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens dont tous les membres sont positifs.
On peut aussi utiliser le sens de variation des fonctions usuelles :
La fonction $x\mapsto x^2$ est décroissante sur R_- et croissante sur R_+ : ainsi si $a<b\leq 0$ alors $a^2>b^2$; si $0\leq a<b$ alors $a^2<b^2$.
La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est croissante sur R_+ : ainsi si $0\leq a<b$ alors $\sqrt{a}<\sqrt{b}$.

La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$, ,appelée fonction inverse, est décroissante sur R_-^* et décroissante sur R_+^*

Ainsi, si $a<b<0$ alors $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$ et si $0<a<b$ alors $0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$.

Attention si a < 0 et b > 0 alors $\frac{1}{a}<0<\frac{1}{b}$.

6) La fonction logarithme népérien

a)Définition et conséquences

La fonction logarithme népérien, $x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0,+\infty[$, a pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Elle est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans R. Ainsi pour tous réels strictement positifs a et b :

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

b) Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier n :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$;

$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$; $\ln a^n = n\ln a$

7) La fonction exponentielle

a) Définition

La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est définie sur R à valeurs dans $]0,+\infty[$, a pour dérivée elle-même. Elle est continue et strictement croissante sur R.

Pour tous réels a et b : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

b) Propriétés

Pour tous réels a et b et tout entier n :

$e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $\left(e^a\right)^n = e^{na}$;

Pour tout réel x strictement positif et tout réel y : $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$

Pour tout réel x : $\ln\left(e^x\right) = x$ et pour tout réel x strictement positif $e^{\ln x} = x$

8) Suites numériques

a) Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r fixé tel que : $\forall n \in N_p$, $u_{n+1} = u_n + r$.

r s'appelle la raison de la suite.

Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p .

Alors : $\forall n \in N_p$, $u_n = u_p + (n-p)r$

Si p = 0 alors $u_n = u_0 + nr$

b) Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est géometrique s'il existe un réel q fixé tel que : $\forall n \in N_p$, $u_{n+1} = qu_n$

q s'appelle la raison de la suite.

Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p.

Alors : $\forall n \in N_p,\ u_n = q^{n-p}u_p$

Si p = 0 alors $u_n = q^n u_0$

EXERCICES

Exercice 1

1) Simplifier les fractions suivantes :

$$A = \frac{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}}} \quad ; \quad B = 5 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}} \quad ; \quad C = \frac{2}{3} - \frac{1 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{3}{2} - \frac{7}{4}} + \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{2} \times \frac{3}{5}}$$

2) Soit x et y deux réels tels que x + y $\neq$ 0 et x – y $\neq$ 0. Simplifier les fractions suivantes :

$$D = \frac{x}{2} \times \frac{x+1}{6} \times \frac{4}{x^3 - x} \quad ; \quad E = \frac{x-y}{x} \times \frac{x^2 + xy}{6} \times \frac{3x}{x^2 - y^2} \quad ; \quad F = \frac{\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}}$$

Exercice 2

Soit x un réel non nul. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{2x^2 \times 3x^3 \times 4x^4 \times (6x^2)^3}{12x^3 \times (3x^2)^2} \quad ; \quad B = \frac{5x^{-2} \times (4x^3)^{-3}}{(16x^4)^{-1} \times ((5x^2)^{-2})^2} \quad ; \quad C = \frac{(-4)^3 \times 15^2 \times 5^{-3}}{6^3 \times (-10)^{-2}}$$

$$D = \frac{-5^4 \times (-3)^{-2} \times 10^{-3}}{6^{-3} \times 15^{-2}} \quad ; \quad E = \frac{\sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[4]{32}}{8\sqrt[8]{4}} + \sqrt[10]{1024} - 2^{-2}\sqrt{2^6} \quad ; \quad F = 5^{\frac{2}{3}}\sqrt[6]{5}\sqrt[5]{125}$$

Exercice 3

Simplifier les écritures suivantes :

$$A = -\sqrt{50} + \sqrt{32} + \sqrt{2} \quad ; \quad B = \sqrt{\frac{16}{28}} - \sqrt{\frac{125}{49}} - 4\sqrt{\frac{63}{75}} \quad ; \quad C = (\sqrt{28} + \sqrt{7} - \sqrt{32})(\sqrt{63} - 2\sqrt{8})$$

$$D = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \quad ; \quad E = \sqrt{9(1-\sqrt{3})^2} \quad ; \quad F = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6}-1)^3 + (\sqrt{3}+\sqrt{8})^3$$

Exercice 4

Comparer les réels suivants :

a) $6\sqrt{5}$ et $8\sqrt{3}$

b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{21}+\sqrt{10}$ et $\sqrt{6}+\sqrt{35}$

Exercice 5

On désigne par a et b deux réels strictement positifs tels que a + b = 1.

1) Etablir les égalités suivantes :

a) $a^2-b^2=2a-1$

b) $a^3+b^3=1-3ab$

2) Etablir les inégalités suivantes

a) $ab\leq\dfrac{1}{4}$

b) $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}$

c) $\dfrac{a}{1+b}+\dfrac{b}{1+a}\leq 1$

d) $\dfrac{a}{1+b}+\dfrac{b}{1+a}\geq\dfrac{2}{3}$

e) $a^2+b^2\geq\dfrac{1}{2}$

f) $a^3+b^3\geq\dfrac{1}{4}$

Exercice 6

Soient $x=\sqrt{98}+\sqrt{32}-\sqrt{8}$ et $y=\sqrt{162}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

1) Simplifier les écritures de x et y

2) Calculer $\dfrac{x+y}{2}$, $\sqrt{xy}$ et $\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ et classer ces trois nombres par ordre croissant.

Exercice 7

1) Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que : $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}$.

2) Soient a, b, c trois réels strictement positifs. Montrer que : (a+b)(b+c)(c+a) $\geq$ 8abc.

Exercice 8

1) Développer les expressions suivantes :

$A=(x-3)(2x+1)(3x-4)$; $B=(x+3)^3-(x^2+x+1)^2$;

$C=3(-2-x)^2+2(2x-3)^3+(1-2x)(8x^2-1)$

2) Factoriser les expressions suivantes :

$A=(x^2-x+1)^3-(x^2+x-1)^3$; $B=(2x+1)^3+(x-2)^3$;

$C=(2x-1)^2-(3+2x)^2+(5x+4)(2x+1)$

Exercice 9

Simplifier les écritures suivantes :

$a = \ln 567 - \ln 72 - \ln \frac{7}{8} + \ln \frac{1}{27}$

$b = \ln \sqrt{135} + \ln \sqrt{75} - \ln 15 - \ln \sqrt{27}$

$c = e^{\frac{1}{2}\ln 16} + e^{-\ln \frac{3}{2}} + \ln e^{-3}$

$d = \frac{e}{e^{2+\ln 3}} + \frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}} - \left(e^{-\frac{1}{3}+\ln 2} \right)^3$

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes :

1) $(3x+1)(4x+1)=1$

2) $x(x+2)(x+3)=x^3+32$

3) $\left(\frac{x+2}{x-3} \right)^2 = 36$

4) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{7}{12}$

5) $\frac{3x+1}{x+1} = \frac{x+2}{x-1}$

6) $\frac{4}{x^2+1} - \frac{1}{2-x^2} = 1$

7) $\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln(3x+5)+\ln x$

8) $3\ln x = \ln(x+2)+\ln(x^2-3)$

9) $e^{3x} - 5e^{2x} - 6e^{x} = 0$

10) $e^{3x+1} + e^{2x+1} = 6e^{x+1}$

Exercice 11

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $4x^2 > (1-3x)^2$

2) $\left(\frac{2x+1}{x-3} \right)^2 \leq 1$

3) $\frac{x}{4+x} \leq \frac{-1}{x+3}$

4) $\frac{1-\frac{1}{x}}{1+x} \leq \frac{1}{x}$

5) $\frac{2x}{x^2-3x+2} > x$

6) $6\left(x+\frac{1}{x} \right)^2 - 35\left(x+\frac{1}{x} \right) + 50 \leq 0$

7) $\ln(x-2)-\ln(2x-3) \leq \ln 3$

8) $\ln\left(3x^2 - x - 2\right) - \ln(6x+4) \geq 0$

9) $e^{x^2} e^x < e^6$

10) $\dfrac{2e^x - 1}{e^x - 2} < \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

<u>Exercice 12</u>

Déterminer le domaine de définition, étudier le sens de variation et dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^3 + x^2 + 3x - 1$

2) $f(x) = \dfrac{x}{2-x} + \dfrac{1-x}{1+x}$

3) $f(x) = \dfrac{4x^2 + x - 2}{x^2 + x - 2}$

4) $f(x) = x + 1 - 2\sqrt{x}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$

6) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

7) $f(x) = \dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{3}{2}\right)$

8) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

9) $f(x) = \left(x^2 - 2x\right)e^x$

10) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$

<u>Exercice 13</u>

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2 + u_n}$

1) Calculer u_1, u_2, u_3

2) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.

3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

4) Etudier le sens de variation de la suite (u_n) .

<u>Exercice 14</u>

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = -\dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{7}{2}$

1) Calculer u_1, u_2, u_3

2) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 2$

Montrer que la suite (v_n) est géométrique .

3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

4) Etudier le sens de variation de la suite (u_n) .