Classes préparatoires privées
aux Grandes Écoles de Management

MATHEMATIQUES - Voie économique
Professeur : Monsieur MARIE

INTRODUCTION

Ce dossier propose un récapitulatif de certaines notions de calcul élémentaire indispensables pour suivre une première année d' ECE. Ces notions doivent être parfaitement assimilées et maitrisées. L'usage de toute calculatrice étant interdit aux concours d'entrée aux grandes écoles de commerce, il est indispensable de se familiariser avec le calcul mental en s'interdisant l'usage d'une calculatrice pour traiter les exercices.
Les exercices suivis du symbole * sont plus difficiles. Bonnes vacances…et bon travail !

COURS

1) Fractions

Une fraction est définie si et seulement si son dénominateur est non nul.

Une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul.

On peut simplifier une fraction par un nombre si ce nombre est non nul et s'il est factorisé au numérateur et au dénominateur de la fraction.

Pour additionner ou soustraire deux fractions, il faut les réduire au même dénominateur, c'està-dire trouver le plus petit multiple commun aux deux dénominateurs, puis additionner les nouveaux numérateurs obtenus.

Pour multiplier deux fractions, il faut multiplier les numérateurs et les dénominateurs entre eux.

Pour multiplier une fraction par un nombre, il faut multiplier le numérateur de la fraction par le nombre.

Pour diviser deux fractions, il faut multiplier la première par l'inverse de la seconde.

2) Puissances entières

Pour tout réel a non nul et tout entier naturel n :

$a^n = a \times a \ldots \times a$ (n facteurs) ; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$; $a^0 = 1$

Pour tous réels a et b non nuls et tous entiers relatifs n et p :

$a^n \times a^p = a^{n+p}$; $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$; $a^n \times b^n = (ab)^n$; $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

3) Identités remarquables

Pour tous réels a, b, c :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$+ 2ab + 2ac + 2bc

4) Racine carrée

Pour tout réel a positif , on appelle racine carrée de a l'unique réel positif dont le carré vaut a. On le note $\sqrt{a}$

Si a > 0, l'équation x^2 =b a deux solutions : $\sqrt{b}$ et - $\sqrt{b}$

si b < 0, l'équation x^2 = b n'a pas de solution.

Pour tous réels a et b positif : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (b ≠ 0) .

Attention, en général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$; par exemple :
$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ tandis que $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ = 3 + 4 = 7 .

5) Inégalités

Pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence ; démontrer l'inégalité $a < b$ équivaut à démontrer a – b < 0 ou b – a > 0.
En ajoutant un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on ne change pas le sens de l'inégalité.
En multipliant les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif, on obtient une inégalité de même sens.
En multipliant les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif, on obtient une inégalité de sens contraire.
On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens.
On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens dont tous les membres sont positifs.
On peut aussi utiliser le sens de variation des fonctions usuelles : La fonction x ⍰⍰x^2 est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$:
ainsi si $a < b < 0$ alors $a^2 > b^2$; si $0 < a < b$ alors $a^2 < b^2$.
La fonction x ⍰⍰$\sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ appelée fonction inverse, est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

6) La fonction logarithme népérien

a) Définition et conséquences

La fonction logarithme népérien, $x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0,+\infty[$, a pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Elle est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans R avec $\ln 1 = 0$.
Ainsi :pour tout réel $x \in]0,1[$, $ln x < 0$ et pour tout réel $x \in]1, +\infty[$, $ln x > 0$
Pour tout couple (a,b) de réels strictement positifs :
$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ et $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

b) Propriétés
Pour tout couple (a,b) de réels strictement positifs et tout entier q :
$ln(ab) = ln a + ln b$; $ln\left(\frac{1}{a}\right) = - ln a$; $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln a - ln b$;
$ln\sqrt{a} = \frac{1}{2} ln a$; $ln a^q = q ln a$

7) La fonction exponentielle

a) La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$, a pour dérivée elle-même. Elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour tout couple (a,b) de réels : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

b) Propriétés
Pour tout couple (a,b) de réels et tout entier q :
$e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^q = e^{aq}$
pour out réel x, $\ln(e^x) = x$; pour tout réel x > 0 , $e^{\ln x} = x$

8) Suites arithmétiques

a) Définition
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe un réel r fixé tel que : ℕ, $u_{n+1} = u_n + r$
r s'appelle la raison de la suite.

b) Expression en fonction de n
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
Alors : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_p + (n-p)r$
Si p = 0 alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$

c) Somme des termes d'une suite arithmétique
Théorème
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r , n et p deux entiers naturels tels que n $\geq p$
Posons $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$. Alors, $S_n = \frac{u_p + u_n}{2}(n - p + 1)$.

9) **Suites géométriques**

a) Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe un réel q fixé tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$.

q s'appelle la raison de la suite.

b) Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, p un entier naturel.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_p q^{n-p}$.

Si p = 0 ,alors, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0$

c) Somme des termes d'une suite géométrique

Théorème

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p, n un entier $n \geq p$.

Posons $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$. Alors, $S_n = \begin{cases} u_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \\ (n-p+1)u_p & si\ q = 1 \end{cases}$

EXERCICES

Exercice 1

1) Calculer et simplifier les fractions suivantes :

$A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{8}$; B $= 2 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{2} - \dfrac{7}{6}$; $C = \dfrac{6}{5} \times \dfrac{15}{8} \times \dfrac{12}{27}$ $D = \dfrac{1 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3}}{\frac{5}{6} - \frac{3}{4}}$;

E $= \dfrac{\frac{3}{5} + \frac{3}{10} - 7\frac{6}{25}}{\frac{4}{15} - \frac{7}{2} + \frac{7}{10}}$

2) Soit x un réel différent de 0, -1 et 1. Exprimer en fonction de x les expressions suivantes :

D $= \dfrac{3}{2x} - \dfrac{x-1}{1+x} + \dfrac{2}{1-x^2}$; E = 2+ $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}$; F $= \dfrac{6}{x+1} + \dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{5}{x-1}$

Exercice 2

1) On considère trois réels a, b, c non nuls. Simplifier les expressions suivantes :

A = $a^2b^4c^3\left(ab^{-2}\right)^2$: B $= \dfrac{4\left(2a^{-2}b^2\right)^2}{6a^3b^3c^{-2}}$: C = 8 $\left(ab^2c^{-3}\right)^4 \dfrac{18a^{-2}\left(b^3c^2\right)^3}{24b^2c^3}$

2) Soit n un entier naturel. Ecrire les nombres suivants comme produits de puissances de nombres premiers :

$D = 8 \times 2^{n-2}$; $E = 18 \times 3^{n-1} \times 2^{3n}$ $F = 25 \times 5^{n+1} \times 3^{n-2}$ $G = \dfrac{6^n \times 10^{-n+1}}{30 \times 15^{n+2}}$

3) Simplifier les expressions suivantes :

$H = 3\sqrt{20} - 2\sqrt{18} + \sqrt{40}$ $I = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

$J = \sqrt{3} \times \sqrt{9} \times \sqrt{27}$ $K = \dfrac{\sqrt{16} \times 3\sqrt{8}}{2\sqrt{32}}$

Exercice 3

Soit x un réel.

1) Développer les expressions suivantes :

$A = (2x+3)^2 - \left(x + \dfrac{3}{2}\right)(3x+2)$; $B = (2x+3)^2 - (-x+3)^2$

$C = \left(2x^2 + 5x + 3\right)^2$; $D = \left(3x^2 - 2\right)^2 + 2\left(1 - \dfrac{2}{3}x\right)^2 + \left(1 - 2x + 3x^2\right)^2$

$E = x\left(\dfrac{1}{3}x - 2\right)\left(\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}\right) - \left(\dfrac{1}{3}x^2 - 1\right)\left(\dfrac{1}{3}x^2 + 1\right)$

2) Factoriser les expressions suivantes

$A = (3x+1)^2 - (2x+3)^2$; $B = (2x+4)(3x-2) - (2-3x)(x-1)$.

$C = (2x+3)^2 - 4(-x+3)^2$ $D = (4x-2) + 3(x+1)(1-2x) + 4x^2 - 1$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

1) 3(x+4) -5(3 + 5x) = 2(1- 4x) 2) $\left(2x+5\right)(x-3) - 4x + 10 = 0$

3) $\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{2x-2} = 0$ 4) $\dfrac{2-5x}{3+4x} = \dfrac{7x+3}{x+6}$

5)$(2x-11)^2 = \left(6+2x\right)^2$ 6) $1 + x + x^2 + x^3 = 0$

Exercice 5

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $2(3+4x) < 3(2x+3)$ 2) $\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{2}{3}x + 4\right) > (x-1)\left(\dfrac{4}{9}x - \dfrac{5}{6}\right)$

3) $(x+2)^2 - \left(5-2x\right)^2 > 0$ 4) $\dfrac{2x+1}{x-1} \geq \dfrac{2x+6}{x-2}$

Exercice 6

1) Soit x un réel strictement positif . Montrer que :

a) $x \geq 6 - \dfrac{9}{x}$

b) $\sqrt{2x} \leq x + 1$.

2) Soit a et b deux réels strictement positifs . Montrer que :

c) $2ab \leq a^2 + b^2$

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{2}{\sqrt{ab}}$

Exercice 7

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $2(lnx)^2 - 3lnx + 1 = 0$ 2) $(lnx)^2 - 5ln\dfrac{1}{x} + 4 = 0$ 3) $\dfrac{lnx + 3}{1 + 2lnx} = 1$

4) $3e^{2x} + e^x - 4 = 0$ 5) $e^{-2x} - 2e^{-x} + 1 = 0$ 6) $\dfrac{e^{2x} - 2}{3 - e^{2x}} = 4$

7) $ln(x + 3) + ln(1 + x) \leq ln3$ 8) $e^{x-1}e^{2x+3}e^{5-x} > 4$

Exercice 8 (*)

1) Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer que : $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{a + b}{2}$

2) En déduire que si a, b, c sont trois réels strictement positifs, alors : (a+b)(b+c)(c+a)≥ 8abc.

Exercice 9 (*)

1) Soit x et y deux réels positifs.

a) Montrer que : $\sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

b) En déduire que si $x \geq y : \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$

c) En déduire que : $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x - y|}$

2) Résoudre dans ℝ :

a) $|x + 2| + |3x - 1| = 4$

b) $\left|x^2 - 6x + 4\right| \leq 1$

Exercice 10

Simplifier les écritures suivantes :

a = ln189 -ln72+2ln$\dfrac{7}{8}$ - ln$\dfrac{1}{27}$

b = ln 135 -2ln 75 +3ln15- ln $\sqrt{27}$

c =2

$$e^{-4}e^{3}\frac{\left(e^{-2}\right)^{3}}{\left(e^{-5}e^{\frac{3}{2}}\right)^{2}}$$

Exercice 11

Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} -x+3y=1 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=2 \\ 5x+4y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{3}x+\sqrt{3}y=3-\sqrt{3} \\ -x+2\sqrt{3}y=-3\sqrt{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ -3x+3y-z=0 \\ 4x+y-2z=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+y-z=-3 \\ -3x-3y+z=4 \\ x+y+6z=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+z=\frac{1}{2} \\ 4x+y-2z=-1 \\ y-5z=-6 \end{cases}$

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-x}$.

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{x}-x-1$

a) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $g(x)$.

b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ e^{x}-x>0$.

2) a) Calculer $f'(x)$.

b) Etudier le sens de variations de f.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $f(x)=1-\dfrac{1}{x}-2ln\,x$.

Etudier le sens de variation de la fonction f .

Exercice 14

Soit f la fonction définie par $f(x)=ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x+ln\left(1+e^{-2x}\right)$

b) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)>x$.

3) a) Calculer $f'(x)$.

b) Etudier le sens de variations de f.

Exercice 15

Un locataire loue un appartement à partir du 1^{er} janvier 2019.

Il a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer initial est de 4800€.

1) Contrat $n°1$. Le locataire accepte une augmentation de 5% du loyer de l'année précédente.

On note u_n le loyer payé la $n^{ème}$ année.

a) Calculer u_2.
b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
c) En déduire u_n en fonction de n.
d) En déduire la somme totale payée en 10 années de location.
2) Contrat $n°2$. Le locataire accepte une augmentation de 300€ du loyer de l'année précédente. On note v_n le loyer payé la $n^{ème}$ année.
a) Calculer v_2.
b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
c) En déduire v_n en fonction de n.
d) En déduire la somme totale payée en 10 années de location.
3) Quel est le contrat le plus avantageux pour 10 années de location ?

Exercice 16

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 3u_{n+1} = u_n + 4$.
On pose , pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$.
1) Montrer que la suite $\left(v_n\right)$ est géométrique.
2) En déduire v_n puis u_n en fonction de n.
On pose $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
3) Déterminer S_n puis T_n en fonction de n.
4) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Exercice 17

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 12$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 3$.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 9$.
1)a) Montrer que la suite $\left(v_n\right)$ est géométrique.
b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, v_n en fonction de n.
c) En déduire u_n en fonction de n.
d) Calculer $S_n = v_0 + \ldots + v_n$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
2) On définit la suite $\left(w_n\right)$, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $w_n = \ln\left(v_n\right)$.
a) Montrer que la suite $\left(w_n\right)$ est arithmétique
b) Calculer $S'_n = w_0 + \ldots + w_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$.

Exercice 18 (*)

Partie 1

Pour tout réel x > 0 , on pose :
$f(x) = x - 1 - \ln x$ ·
1) De l'étude de f, déduire que, pour tout x > 0, on a :
$\ln x \leq x - 1$ · (1)

Partie 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, $a_1, a_2, ..., a_n$ n nombres réels strictement positifs.

On pose :

$u = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$; $v = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$; $\frac{n}{w} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$.

1)a) En appliquant l'inégalité (1) successivement pour : $x = \frac{a_1}{u}, x = \frac{a_2}{u}, ..., x = \frac{a_n}{u}$

Et en combinant les n inégalités obtenues, montrer que $v \leq u$. (2)

b) Dans quel cas a-t-on $v = u$?

2)a) En remplaçant dans (2) les n nombres $a_1, a_2, ..., a_n$ par leurs inverses, prouver que $w \leq v$.

b) Dans quel cas a-t-on $w = v$?