Prépa COMMERCIA

Document de travail en mathématiques pour l'entrée en ECS1

Chers futurs étudiants, comme vous le constaterez, les mathématiques de prépa sont très différentes des enseignements que vous avez connus jusqu'ici. Ce polycopié présente des concepts qui vous aideront grandement à appréhender cette nouveauté.
Ce polycopié peut être abordé dès la fin de la classe de terminale et particulièrement durant l'été qui précède l'entrée en ECS. Il est préférable d'étudier les paragraphes dans l'ordre et de passer le temps nécessaire à bien comprendre une notion plutôt que de vouloir tout survoler. Nous vous recommandons d'étudier prioritairement :

— Dans le chapitre 1 les raisonnements par récurrence (avec les exercices 1,2,3,5,6). *On pourra laisser le raisonnement par l'absurde et par analyse synthèse en deuxième lecture.*
— Dans le chapitre 2 les calculs de somme qui sont très importants. Cet outil sera utilisé tout au long de l'année (les exercices 8,9,11,15,16 sont à travailler particulièrement).
— Dans le chapitre 3 les formules de trigonométrie et de nombres complexes. (les exercices 20, 24 , 25 sont à travailler).
— Le chapitre 5 sur la dérivation avec les exercices 38, 40,42,43,44. *On pourra laisser l'exercice 41 et la méthode de Newton en deuxième lecture.*

Les autres parties du polycopié pourront être étudiées également avec profit, mais il est préférable de se concentrer sur les points cités ci-dessus avant de les aborder.

Les mathématiques ne se lisent pas comme un roman et il est nécessaire de s'armer d'un crayon et d'essayer de refaire les calculs et démonstrations par soi-même.
Enfin, ne vous découragez surtout pas si vous ne trouvez pas toutes les solutions. Il faut parfois s'y reprendre à plusieurs fois pour résoudre une question difficile ; les techniques seront toutes reprises durant l'année et les exercices dont les numéros sont cités comme étant prioritaires seront corrigés en classe lors du premier semestre.

Bon travail !

Sommaire

1 Rédaction, modes de raisonnement **4**
- 1.1 Rédaction, quantificateurs . . . 4
  - 1.1.1 Vocabulaire et notations utilisés . . . 4
  - 1.1.2 Généralités . . . 6
  - 1.1.3 Quantificateurs . . . 6
- 1.2 Le raisonnement par récurrence (1) . . . 7
- 1.3 Le raisonnement par récurrence (2) . . . 10
- 1.4 Le raisonnement par l'absurde . . . 11
- 1.5 Le raisonnement par analyse-synthèse . . . 12

2 Calculs algébriques **14**
- 2.1 Généralités et rappels . . . 14
- 2.2 Le symbole $\sum$ . . . 14
- 2.3 Sommes télescopiques . . . 17
- 2.4 Le symbole $\prod$ . . . 20
- 2.5 Factorielle d'un entier naturel . . . 21

3 Trigonométrie et nombres complexes **24**
- 3.1 Trigonométrie . . . 24
- 3.2 Nombres complexes . . . 24

4 Inégalités, trinôme du second degré réel **25**
- 4.1 Inégalités et inéquations : méthodes élémentaires . . . 25
- 4.2 Le trinôme du second degré réel . . . 26

5 Dérivation **30**
- 5.1 Calcul des dérivées . . . 30
- 5.2 Tangente à un graphe . . . 31
- 5.3 Applications de la dérivation . . . 32
  - 5.3.1 Étude de fonctions, résolution d'équations . . . 32
  - 5.3.2 Démonstration d'inégalités . . . 34

6 Calcul des limites **36**
- 6.1 Introduction et premiers exemples . . . 36
- 6.2 Utilisation de taux d'accroissement . . . 36
- 6.3 Mise en facteur du terme prépondérant . . . 37

7 Intégration **40**
- 7.1 Rappels . . . 40
- 7.2 L'intégration par parties . . . 41

8 Réponses ou indications **44**

1 Rédaction, modes de raisonnement

1.1 Rédaction, quantificateurs

1.1.1 Vocabulaire et notations utilisés

Pour la commodité du lecteur, on regroupe ici quelques termes et notations d'usage courant.

Ensembles de nombres usuels

Dans tout ce texte, on utilise les notations usuelles ci-après.

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, c'est-à-dire ≥ 1.

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs, $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions

$$\frac{p}{q}, \qquad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*.$$

On peut, quitte à simplifier, supposer la fraction irréductible, c'est-à-dire que le seul diviseur commun à p et q est 1.

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, $\mathbb{R}^{+*}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

On a les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Les nombres réels non rationnels sont dits irrationnels. Vous rencontrerez dans ce texte plusieurs exemples de nombres irrationnels.

Segments de $\mathbb{R}$

Si a et b sont deux nombres réels, on note $[a, b]$ l'ensemble des réels compris, au sens large, entre a et b.

Cette notation vaut quel que soit l'ordre dans lequel a et b sont rangés. Ainsi :

$$[0, 1] = [1, 0].$$

Les ensembles de la forme $[a, b]$ sont appelés *segments de* $\mathbb{R}$.

Partie entière d'un nombre réel

La *partie entière*, ou *partie entière inférieure* d'un réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, désigne le plus grand entier relatif plus petit que x. Autrement dit, $\lfloor x \rfloor$ appartient à $\mathbb{Z}$ et vérifie :

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1.$$

Ainsi :

$$\lfloor 3,8 \rfloor = 3, \qquad \lfloor -4,1 \rfloor = -5.$$

Si x est positif ou nul, $\lfloor x \rfloor$ s'obtient en « enlevant à x sa partie décimale ».

Limites

Pour a et b dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la notation

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

est correcte mais génératrice d'incorrections : elle conduit à supposer a priori l'existence d'une limite. On lui préfère ici l'écriture

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b.$$

Pour une suite $(u_n)_{n \geq 0}$, « n ne peut tendre que vers $+\infty$ ». On écrit indifféremment

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell, \quad \text{ou : } u_n \longrightarrow \ell.$$

Dérivées successives d'une fonction

Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle I, la fonction dérivée de f est notée f'. Si f' est elle-même dérivable sur I, on dit que f *est deux fois dérivable sur* I ; la dérivée $(f')'$ de f' est alors notée f''. On généralise sans peine ; si f est n fois dérivable sur I, sa dérivée n-ième est notée $f^{(n)}$.

Cercle unité, ou cercle trigonométrique

On appelle ainsi le cercle de centre O et de rayon 1 du plan $\mathbb{R}^2$. Lorsque ce plan est identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le cercle s'identifie à l'ensemble des complexes de module 1.

Pente d'une droite de $\mathbb{R}^2$

Soit D une droite du plan $\mathbb{R}^2$ non parallèle à l'axe des ordonnées : D admet donc une unique équation de la forme

$$y = ax + b, \qquad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

On appelle *pente* ou *coefficient directeur* de D le réel a. L'interprétation géométrique est claire : si M_1 et M_2 sont deux points distincts de D de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2), alors

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

i.e.

Cette abréviation du latin « id est » est très employée en mathématiques ; elle signifie « c'est-à-dire ».

Trivial

En mathématiques, le mot « trivial » est employé comme synonyme de « évident ».

1.1.2 Généralités

La rédaction mathématique obéit à des règles précises qui doivent être rapidement maîtrisées. Voici les plus importantes.

- Un objet mathématique est *déclaré* avant d'être utilisé, en général par le terme « soit » ; la déclaration précise la nature de l'objet (exemples : « soit $\vec{v}$ un vecteur non nul », « soit z un nombre complexe non réel », « soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ » ...).

- Un discours mathématique n'est pas une suite de symboles. L'argumentation est, pour l'essentiel, rédigée en langage ordinaire (et correct), avec des phrases complètes.

En particulier, les quantificateurs et les symboles d'implication $\Rightarrow$ et d'équivalence $\Leftrightarrow$, utiles pour énoncer de manière précise et concise des propriétés, ne doivent pas être employés comme des abréviations à l'intérieur du discours.

- Il est bon d'annoncer ce que l'on va faire, par des locutions du type « Montrons que ».

Bien rédiger s'acquiert essentiellement par l'usage ; les exemples présentés dans la suite devraient vous donner une idée de ce qui est attendu.

1.1.3 Quantificateurs

Les quantificateurs sont évoqués dans le programme de Terminale sans que les notations les concernant ne soient exigibles. Précisons ces notations, dont l'emploi est très commode et que nous utiliserons dans la suite.

Le quantificateur universel est noté $\forall$; il signifie « pour tout » ou « quel que soit ». Le quantificateur existentiel est noté $\exists$; il signifie « il existe ». Par exemple, la phrase

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x > 0$$

signifie que, pour tout réel x, le réel e^x est strictement positif. La phrase :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad y = x^5 - 5x$$

signifie que, pour tout réel y, il existe (au moins) un réel x tel que

$$x^5 - 5x = y,$$

ce que l'on peut établir au moyen d'une étude de fonction (cf paragraphe **5.3**).

Les quantificateurs permettent de formuler de manière condensée certaines propriétés. Vous verrez par exemple que, pour une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$, l'assertion « $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 » est définie par :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \ \Rightarrow \ |u_n| \leq \varepsilon.$$

Cette définition est intuitivement raisonnable : dès qu'on se fixe un seuil ε, il existe un entier naturel N (dépendant de ε) tel que, pour $n \geq N$, $|u_n|$ soit majoré par ε. De manière plus informelle, étant donné un seuil $\varepsilon > 0$, la suite (u_n) est bornée par ε « à partir d'un certain rang ».

On n'emploie les symboles $\forall$ et $\exists$ que dans des phrases intégralement écrites en langage quantifié et, à vrai dire, le plus souvent dans des définitions. En aucun cas on ne peut mélanger quantificateur et phrase française : les quantificateurs ne sont pas des abréviations. Commencer une démonstration par un quantificateur est une faute grave. Si l'on veut prouver qu'une propriété est vraie pour tout réel x, la rédaction commence en *déclarant* x : « Soit x dans $\mathbb{R}$. » . On montre ensuite que la propriété désirée est vraie pour x.

Dans la suite de ce document, nous utiliserons les quantificateurs uniquement pour formuler rapidement certaines propriétés.

1.2 Le raisonnement par récurrence (1)

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant de l'entier naturel n. Pour démontrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$, on peut procéder de la façon suivante.

- *Initialisation.* On établit la propriété pour $n = 0$.

- *Hérédité.* On fixe un entier n tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On montre alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est également vraie.

Ces deux points étant acquis, on peut conclure que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n. Le raisonnement présenté est la forme la plus simple de raisonnement par récurrence.

Il se peut que l'on demande de prouver la validité d'une propriété $\mathcal{P}_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$; l'initialisation consiste alors en la vérification de $\mathcal{P}_1$.

Le raisonnement par récurrence est un outil essentiel. Dans la plupart des exemples que vous verrez en première année, sa mise en oeuvre ne pose pas de difficulté. Il convient en revanche de rédiger soigneusement. En particulier, n étant fixé, aucune quantification relative à l'entier n ne doit apparaître dans la formulation de la propriété $\mathcal{P}_n$: nommer $\mathcal{P}_n$ une propriété de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ldots$$

n'a aucun sens. Il suffit de substituer à n une valeur quelconque (disons 2013) pour s'en convaincre.

Exemples

1. $(*)$ *Somme des carrés des n premiers entiers*

   Pour n dans $\mathbb{N}^*$, la somme des n premiers entiers est donnée par la formule :

   $$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

   sur laquelle nous reviendrons dans le paragraphe **2.3**.

   Ici, nous allons montrer par récurrence :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété

   $$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Initialisation. La vérification de $\mathcal{P}_1$ est immédiate

$$1^2 = 1 = \frac{1.2.3}{6} = 1.$$

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On a donc :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Alors :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + (n+1)^2,$$

d'où, grâce à $\mathcal{P}_n$:

$$1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1)+6(n+1)\right).$$

Mais :

$$n(2n+1) + 6(n+1) = 2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3).$$

En fin de compte :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

2. *Une inégalité*

Montrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Initialisation. On a $2 - \frac{1}{1} = 1$ donc :

$$1 \leq 2 - \frac{1}{1}.$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On a donc :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

En ajoutant $1/(n+1)^2$ aux deux membres de l'inégalité, il vient :

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Notons maintenant que :

$$2-\frac{1}{n+1}-\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n(n+1)^2}\geq 0.$$

Il en résulte que le membre de droite de (1) est majoré par

$$2-\frac{1}{n+1}.$$

Il en est a fortiori de même du membre de gauche, ce qui signifie que l'on a :

$$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leq 2-\frac{1}{n+1}.$$

C'est exactement $\mathcal{P}_{n+1}$.

Exercice 1 ((F,$*$). Sommes des cubes des n premiers entiers)**.** *Montrer :*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad 1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 2 (I)**.** *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :*

$$u_0\in\mathbb{R}\ ;\qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}={u_n}^2.$$

Calculer u_n en fonction de u_0 et n.

On pourra commencer par écrire u_n pour n valant $1,2,3,4$. De manière générale, lorsqu'on souhaite calculer une quantité dépendant d'un entier n, il est souvent utile de commencer par deviner le résultat en considérant les petites valeurs de n.

Exercice 3 ((I,$*$). Suites arithmético-géométriques)**.** *Soient a et b deux réels, $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+1}=au_n+b.$$

On se propose de calculer u_n en fonction de n et u_0.

a) Traiter le cas $a=1$.

On suppose désormais $a\neq 1$.

b) Résoudre l'équation $x=ax+b$. On note ℓ la solution. Dans la question suivante, il est inutile (voire toxique) de remplacer ℓ par sa valeur ; seule est utile l'équation

$$\ell=a\ell+b.$$

c) On pose, pour n dans $\mathbb{N}$:

$$v_n=u_n-\ell.$$

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Conclure.

d) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ?

Les suites étudiées dans cet exercice sont dites « arithmético-géométriques ». Les suites arithmétiques (resp. géométriques) correspondent au cas particulier $a=1$ (resp. $b=0$).

Exercice 4 (D)**.** *Soit c dans $\mathbb{R}^{+*}$. Pour x dans $\mathbb{R}$, soit :*

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}.$$

Calculer $f(f(x)), f(f(f(x)))$ et généraliser.

1.3 Le raisonnement par récurrence (2)

On rencontre fréquemment des récurrences un petit peu plus compliquées. Ainsi, l'hérédité peut consister en la preuve du fait que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ impliquent $\mathcal{P}_{n+2}$, voire en la preuve du fait que $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n$ impliquent $\mathcal{P}_{n+1}$ (« récurrence forte »). La rédaction doit évidemment être adaptée. Dans la première situation (« récurrence à deux termes »), par exemple, l'initialisation doit comporter la vérification de $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$.

Exemples

1. $(*)$ *Suite de Fibonacci*

   La suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ est définie par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1\ ; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

   Cette suite, introduite par Fibonacci au treizième siècle, possède de nombreuses propriétés. Nous allons montrer que F_n est donné par une formule relativement simple.

   Posons

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

   Nous n'utiliserons pas ces expressions, mais le fait que α et β sont racines de l'équation du second degré :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

   Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

   La définition de $(F_n)_{n \geq 0}$ suggère d'établir $\mathcal{P}_n$ par une récurrence à deux termes.

   Initialisation. Les propriétés $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiées. En effet :

$$\frac{\alpha^0 - \beta^0}{\sqrt{5}} = 0 = F_0, \qquad \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}} = 1 = F_1.$$

   Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies. Alors :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{n+1} + \alpha^n - \beta^{n+1} - \beta^n\right).$$

   Mais :

$$\alpha^{n+1} + \alpha^n = \alpha^n \times (\alpha + 1) = \alpha^n \times \alpha^2 = \alpha^{n+2}.$$

   De même :

$$\beta^{n+1} + \beta^n = \beta^{n+2}.$$

   Finalement :

$$F_{n+2} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\sqrt{5}}.$$

   La propriété $\mathcal{P}_{n+2}$ est démontrée.

   Remarques

(a) *Démonstration et explication*

Le raisonnement par récurrence est un outil très efficace pour établir des formules données. Comme l'illustre cet exemple, une démonstration n'est pas forcément une explication et il est légitime de se demander « d'où vient » la formule précédente. Vous verrez en première année une méthode générale permettant de calculer le terme général d'une suite vérifiant une relation de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

(b) *À quoi peut servir l'expression obtenue ?*

D'abord, à rendre plus ou moins immédiate la démonstration de formules algébriques relatives à la suite $(F_n)_{n\geq 0}$, sans pour autant en donner systématiquement la meilleure approche.

Ensuite, à donner le comportement asymptotique (c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$) de $(F_n)_{n\geq 0}$: $(F_n)_{n\geq 0}$ est différence de deux suites géométriques de raisons respectives $\alpha > 1$ et $\beta \in]-1, 0[$. Lorsque n tend vers $+\infty$, F_n se comporte « à peu près » comme la suite géométrique $\left(\alpha^n/\sqrt{5}\right)_{n\geq 0}$, ce que la notion de suites équivalentes, étudiée en première année, permettra de préciser.

Exercice 5 (F)**.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :*

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^n + 3^n.$$

Exercice 6 (F)**.** *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :*

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = \frac{{u_n}^2}{u_{n-1}}.$$

Calculer u_2, u_3, u_4. Deviner ensuite une formule pour u_n. Démontrer finalement la formule devinée par récurrence.

1.4 Le raisonnement par l'absurde

Pour établir une propriété $\mathcal{P}$, on peut *raisonner par l'absurde*, c'est-à-dire supposer que $\mathcal{P}$ est fausse et arriver à une contradiction.

Exemple : ($*$) *Irrationnalité de $\sqrt{2}$*

Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. En raisonnant par l'absurde, on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. On peut donc écrire :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

où p et q sont des éléments de $\mathbb{N}^*$ et où la fraction p/q est irréductible. En élevant au carré, il vient :

$$2\,q^2 = p^2.$$

Par conséquent, p^2 est pair. Or, le carré d'un entier impair est impair, comme le montre la formule :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad (2k+1)^2 = 2(2k^2+2k)+1.$$

Il s'ensuit que p est pair et s'écrit donc $2p'$ où $p' \in \mathbb{N}^*$. On a donc :

$$q^2 = 2\, p'^2,$$

égalité qui montre que q^2 est pair, donc que q est pair. Les deux entiers p et q admettent 2 comme diviseur commun, ce qui contredit l'hypothèse.

Les preuves d'irrationalité reposent en général sur un raisonnement par l'absurde, ce qui est compréhensible, l'irrationalité étant définie par une propriété « négative ».

Exercice 7 (I)**.** *Montrer que* $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ *est irrationnel.*

1.5 Le raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est utilisé pour déterminer les solutions d'un problème donné lorsqu'une rédaction « par équivalence » est impossible ou simplement délicate. Dans la première partie (analyse), on détermine les propriétés d'une éventuelle solution, de manière à limiter sévèrement les possibilités. La seconde partie (synthèse) consiste à déterminer, parmi les solutions fournies par l'analyse, lesquelles sont effectivement solution du problème initial.

Dans les cas d'existence et unicité, l'analyse fournit en général une solution unique ; la synthèse est alors une simple vérification du fait que la solution déterminée par l'analyse convient effectivement.

Exemples

1. ($*$) *Décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire*

   Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On va montrer qu'existe un unique couple (p,i) de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

   - p est paire, i est impaire ;

   - $f = p + i$.

   Analyse. Supposons donc que f s'écrive $p+i$ avec p paire et i impaire. Fixons x dans $\mathbb{R}$. En testant sur x et $-x$ l'égalité des fonctions f et $p+i$, il vient :

   $$f(x) = p(x) + i(x), \qquad f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x).$$

   En faisant la somme et la différence de ces deux égalités, il vient :

   $$p(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right), \qquad i(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$

   Synthèse. Définissons deux fonctions p et i en posant, pour x dans $\mathbb{R}$:

   $$p(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right), \qquad i(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$

   On vérifie immédiatement que p est paire, i impaire et que $f = p + i$.

2. (∗) *Une équation fonctionnelle*

On appelle *équation fonctionnelle* la recherche des fonctions vérifiant certaines conditions. Voici un exemple très classique : on cherche les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$(1) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Noter qu'il y a ici deux conditions : la dérivabilité et la relation (1).

Analyse. Soit f une éventuelle solution. Fixons y et dérivons par rapport à x. Il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x + y) = f'(x).$$

Prenons maintenant $x = 0$, ce qui est possible puisque l'égalité précédente est vraie pour tout x. Il vient, pour tout y de $\mathbb{R}$:

$$f'(y) = f'(0).$$

Ainsi, f' est constante et f affine, c'est-à-dire de la forme :

$$x \mapsto ax + b.$$

Synthèse. Soit f une fonction affine. On dispose de deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax + b.$$

Cherchons si f est solution du problème. D'abord, f est dérivable. Ensuite, pour x et y dans $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x + y) = a(x + y) + b = ax + ay + b,$$

$$f(x) + f(y) = ax + b + ay + b = a(x + y) + 2b.$$

Pour que ces deux expressions soient égales, il faut et il suffit que b soit nul. En conclusion, les solutions du problème sont les fonctions linéaires :

$$x \mapsto ax, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Remarque *Amélioration du résultat*

Une démonstration un peu plus compliquée établit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) et continue sur $\mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto ax$. Comme la continuité est une propriété plus faible que la dérivabilité, ce résultat est plus fort que celui démontré ici. La caractérisation des fonctions linéaires ainsi obtenue remonte à Cauchy (environ 1820).

2 Calculs algébriques

Ce chapitre est fondamental. Son but est de consolider les techniques de calcul algébriques étudiées au lycée et d'introduire les symboles $\sum$ et $\prod$ ainsi que la notion de factorielle d'un entier naturel.

2.1 Généralités et rappels

Une bonne maîtrise du calcul algébrique est indispensable en mathématiques comme en physique. Au delà des règles de calcul élémentaires (distributivité, calcul sur les puissances...), il faut connaître par coeur les résultats suivants.

- Les identités remarquables usuelles : $(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)(a-b)$.

- La somme des n premiers entiers :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- La somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique $(a^k)_{k\geq 0}$ pour $a \neq 1$:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1},$$

à partir de laquelle on retrouve facilement la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique quelconque.

- La factorisation :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

qui est une conséquence simple de la formule précédente. Noter que si n est impair, alors $(-1)^n = -1$ et on a également la factorisation :

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

2.2 Le symbole $\sum$

La *somme* des nombres (réels ou complexes) $a_1, \ldots, a_n$ est notée :

$$(1) \qquad a_1 + \cdots + a_n$$

ou, d'une manière plus compacte et dénuée de toute ambiguïté :

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

On définit plus généralement, pour m entier de $\{1, \ldots, n\}$:

$$(3) \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \cdots + a_n.$$

Dans les expressions (2) et (3), la lettre k, appelée *indice*, est une *variable muette*, ce qui signifie que l'on peut changer son nom sans changer la somme : la somme (1) peut être notée :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

C'est la même situation qu'en intégration. En effet, dans l'écriture

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

la variable t est muette. La sommation est d'ailleurs la version « discrète » de l'intégration.

Les notations ont une importance centrale en mathématiques ; il suffit pour s'en convaincre d'essayer de faire une multiplication en chiffres romains. Le symbole $\sum$ et la notation indexée ont représenté un très grand progrès pour noter efficacement des sommes de longueur arbitraire et il est nécessaire de s'y habituer rapidement. Cependant, il ne faut pas hésiter à revenir à une écriture du type (1) en cas de besoin : pour un calcul non immédiat, il est souvent préférable de calculer, au moins au brouillon, avec des points de suspension.

Exemples

1. $(*)$ *Un exemple trivial*
   La somme
   $$\sum_{k=0}^{n} 3$$
   vaut $3(n+1)$: on somme $n+1$ termes, tous égaux à 3.
2. $(*)$ *Progressions arithmétiques*
   La formule :
   $$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$
   se réécrit
   $$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$
   De cette formule on déduit la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique. En effet, une suite arithmétique est de la forme $(ak+b)_{k\geq 0}$ (a est la *raison* de la progression, b son premier terme). Par linéarité de la somme, il vient :
   $$(b+(a+b)+\cdots+((n-1)a+b)=nb+a\,(1+2+\cdots+(n-1))$$
   ce que l'on réécrit plus synthétiquement :
   $$\sum_{k=0}^{n-1}(ak+b)=nb+a\sum_{k=0}^{n-1}k=nb+\frac{n(n-1)}{2}a.$$
   Il est évidemment absurde d'apprendre par coeur cette formule. Mais il faut savoir la retrouver très rapidement.

3. $(*)$ *Progressions géométriques*
   La formule donnant la somme d'une progression géométrique se réécrit :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1},$$

   pour a nombre complexe différent de 1 et n dans $\mathbb{N}$.

4. $(*)$ *Nombres harmoniques*
   Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on définit le *n-ième nombre harmonique* H_n par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

   Les nombres H_n interviennent très fréquemment en mathématiques et vous les rencontrerez à plusieurs reprises dans les deux années d' ECS. On ne dispose pas de formule simple « non sommatoire » pour H_n.

Le matériel précédent permet déjà des calculs non triviaux. Quelques exemples, sous forme d'exercices.

Exercice 8 (F)**.** *Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Donner une expression simple de la somme*

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

des n premiers entiers impairs.

Exercice 9 ((F,$*$). Somme d'une série géométrique)**.** *Soit r un élément de $]-1,1[$. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k.$$

Montrer :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-r}.$$

Exercice 10 (I)**.** *On lance un dé équilibré. On répète n fois l'opération, les lancers successifs étant supposés indépendants. Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne au moins un 6 parmi ces n lancers ? Déterminer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.*

Exercice 11 (I)**.** *On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$:*

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Simplifier $u_{n+1}-u_n$ et en déduire la monotonie de $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 12 (I). *Montrer, pour tout entier $n \geq 2$:*

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n.$$

Exercice 13 (D). *En utilisant la formule de la progression géométrique et la dérivation, calculer, pour x réel et n dans $\mathbb{N}^*$:*

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k.$$

On distinguera le cas $x = 1$. Pour $|x| < 1$, déterminer la limite de la somme précédente lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 14 (D). *On lance un dé équilibré. On répète n fois l'opération, les lancers successifs étant supposés indépendants. Soit X la variable aléatoire donnant le premier instant d'apparition d'un 6, en convenant que $X = 0$ si 6 n'apparaît pas. Déterminer l'espérance de X. Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?*

2.3 Sommes télescopiques

En général, une somme ne peut pas s'exprimer de façon simple. Les cas où une simplification est possible n'en sont que plus précieux. Une situation intéressante est celle des *sommes télescopiques*. Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = b_{n+1} - b_n.$$

On a alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_{n+1} - b_n).$$

Les termes $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se simplifient. Il reste :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = b_{n+1} - b_0.$$

Il est évidemment possible d'établir cette formule par récurrence sur n.

Exemples

1. $(*)$ *Somme d'une progression arithmétique par télescopage*
   On a
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1.$$
   En sommant ces égalités pour k entre 0 et n, on obtient :
   $$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2.$$

Cette égalité équivaut à :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2k = n^2 - n = n(n-1),$$

c'est-à-dire, après division par 2, à la formule connue

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. $(*)$ *Une somme télescopique classique*
   On a :

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

   Par télescopage, on en déduit, pour n entier ≥ 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

   En particulier

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   Nous allons profiter de l'occasion pour retrouver la majoration vérifiée par récurrence dans l'exemple 2 du paragraphe **1.2**. Soit n un entier ≥ 2. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

   Or, pour $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

   Par suite :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)},$$

   d'où :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

   On retrouve la majoration :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 15 (I). *a) Si n est dans $\mathbb{N}^*$, simplifier :*

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Quelle est la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$?

b) Si n est un entier ≥ 2, simplifier :

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

Quelle est la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 16 (I). *Déterminer trois réels a, b, c tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

En déduire, pour n dans $\mathbb{N}^*$, une expression simple de

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Quelle est la limite de $(U_n)_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 17 ((I,*). Somme des premiers carrés par télescopage). *a) Trouver trois réels a, b, c tels que, si :*

$$P \ : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^3 + bx^2 + cx,$$

on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) - P(x-1) = x^2.$$

En déduire une expression simple de

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

b) Adapter cette méthode pour calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Remarque *Somme des puissances p-ièmes des n premiers entiers naturels, polynômes de Bernoulli*

On a rencontré dans les pages précédentes les trois formules :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Pour p et n dans $\mathbb{N}^*$, soit

$$S_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

la somme des puissances p-ièmes des n premiers entiers. Vers 1650, Jacob Bernoulli a généralisé les formules précédentes et prouvé que, pour tout p, il existe un polynôme B_p (nommé depuis *polynôme de Bernoulli d'indice* p) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_{p,n} = B_p(n).$$

Le terme de plus haut degré de B_p est $\dfrac{X^{p+1}}{p+1}$, ce qui est cohérent avec les résultats obtenus pour $p = 1, p = 2, p = 3$.

2.4 Le symbole $\prod$

Le *produit* des nombres (réels ou complexes) $a_1, \dots, a_n$ est noté soit :

$$(1) \qquad a_1 \times \cdots \times a_n = a_1 \dots a_n$$

soit, de manière plus compacte :

$$(2) \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Ici encore, la lettre k est appelée *indice* et est une variable muette. Les commentaires relatifs à la somme s'adaptent immédiatement.

Exemples

1. $(*)$ *Deux exemples faciles*

   a) Pour n dans $\mathbb{N}$, $n \geq 3$, on a :

$$\prod_{k=3}^{n} (-5) = (-5)^{n-2}.$$

   On effectue en effet le produit de $n - 2$ termes tous égaux à -5.

   b) Si n est dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} 2^k = 2^{1+2+\cdots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

2. $(*)$ *Produits télescopiques*

   Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de complexes non nuls telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

   On a alors

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \frac{b_1}{b_0} \times \frac{b_2}{b_1} \times \cdots \times \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Les termes $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se simplifient. Il reste :

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \frac{b_{n+1}}{b_0}.$$

En guise d'application, calculons, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k+2}.$$

On a :

$$P_n = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2}.$$

Par suite :

$$P_n = \frac{2}{n+2}.$$

Exercice 18 (F)**.** *a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, simplifier :*

$$A_n = \prod_{k=1}^{n} 4^{k^2+1}.$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, simplifier :

$$B_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{k+4}{k+3}.$$

Exercice 19 (I)**.** *Pour $n \geq 2$, donner une expression simple de*

$$C_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

et trouver la limite de $(C_n)_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2.5 Factorielle d'un entier naturel

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $n!$ et on lit *factorielle de n* ou *factorielle n* le produit :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Ainsi :

$$1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720,\ 7! = 5040.$$

Il est commode de poser également $0! = 1$. Notons la relation de récurrence :

$$(n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Les factorielles interviennent dans de nombreuses questions mathématiques (analyse, algèbre, combinatoire, probabilités). Voici quelques exemples.

Exemples

1. $(*)$ *Produit des premiers entiers pairs (resp. impairs)*
   Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on considère le produit P_n des nombres pairs compris entre 2 et $2n$:
$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (2k).$$
   On peut écrire :
$$P_n = (2 \times 2 \times \cdots \times 2) \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n)$$
   où le nombre de 2 dans la première parenthèse est n. Ainsi :
$$P_n = 2^n\, n!.$$
   Il est alors facile, pour n dans $\mathbb{N}^*$, de calculer le produit Q_n des nombres impairs compris entre 1 et $2n+1$. On observe d'abord que $P_n \times Q_n$ est le produit de tous les entiers entre 1 et $2n+1$, c'est-à-dire $(2n+1)!$. En tenant compte du résultat précédent, il vient :
$$Q_n = \frac{(2n+1)!}{P_n} = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}.$$

2. $(*)$ *Un calcul de dérivée n-ième*
   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{1}{x}.$$
   On se propose de calculer les dérivées successives de f. On a :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = \frac{-1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = \frac{-6}{x^4}.$$
   Il est alors raisonnable de conjecturer, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la relation :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}.$$
   La preuve par récurrence est facile. Soit, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ l'assertion :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$
   On a vérifé $\mathcal{P}_1$. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. En dérivant, il vient, pour x dans $\mathbb{R}^*$:
$$f^{(n+1)}(x) = -(n+1)\frac{(-1)^n n!}{x^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}.$$
   L'assertion $\mathcal{P}_{n+1}$ est établie.

3. $(*)$ *Factorielles et coefficients binomiaux*

Les coefficients binomiaux $\binom{n}{m}$ ont été définis par les arbres. Cette définition a permis, en classe de première, d'établir la *relation de Pascal* : pour n dans $\mathbb{N}^*$ et m dans $\{1,\ldots,n-1\}$:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$$

Les factorielles permettent de donner une formule close pour les coefficients binomiaux :

$$(1) \qquad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Cette expression est très utile, des points de vue théorique et numérique : le calcul de

$$\binom{100}{5} = \frac{100.99.98.97.96}{5!} = \frac{100.99.98.97.96}{120} = 75287520$$

par la formule de Pascal promet d'être passablement fastidieux...

Cependant on observe que les quantités $\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ vérifient la relation de Pascal. En effet, si $m \in \{0,\ldots,n-1\}$:

$$\frac{(n-1)!}{m!\,(n-1-m)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} = \frac{(n-1)!\,(n-m) + (n-1)!\,m}{m!\,(n-m)!},$$

quantité égale à

$$\frac{(n-1)!\,n}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Il est alors facile de se convaincre de la validité de (1).

Explicitons, pour n fixé, les valeurs de $\binom{n}{m}$ pour les premières valeurs de m :

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1, \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Notons également la formule « de symétrie » :

$$\binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}.$$

Exercice 20 (F)**.** *Donner une forme simple de*

$$\sum_{k=1}^{n} (k \times k!)\,.$$

On pourra utiliser l'égalité :

$$k \times k! = (k+1)! - k!.$$

3 Trigonométrie et nombres complexes

3.1 Trigonométrie

Rappels

La trigonométrie est un outil très efficace en géométrie euclidienne du plan (et également de l'espace). Elle joue un rôle important en mathématiques et en physique. Il est essentiel de connaître les points suivants.

- Les valeurs des cosinus et sinus des angles « usuels ». En cas d'hésitation, tracer systématiquement le cercle trigonométrique.

- Les formules :

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \quad \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y),$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x), \quad \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x).$$

Ces formules peuvent être retrouvées rapidement à partir de la formule

$$e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

(développer et prendre parties réelles et imaginaires des deux membres), mais il est utile de les connaître par coeur. Signalons au passage que, pour x réel, nous utiliserons parfois la notation :

$$\exp(ix) = e^{ix}.$$

Il faut également avoir en tête le cas particulier des formules de duplication :

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x), \quad \sin(2x) = 2\sin x \cos x.$$

Exercice 21 (F)**.** *Vérifier l'égalité :*

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

En déduire les valeurs du cosinus et du sinus de $\pi/12$.

Exercice 22 (F)**.** *Calculer le cosinus de* $\pi/8$ *en utilisant la formule de duplication pour le cosinus.*

Exercice 23 (F)**.** *Pour* x *dans* $\mathbb{R}$, *exprimer* $\cos(3x)$ *en fonction de* $\cos(x)$.

3.2 Nombres complexes

Le programme de Terminale permet de maîtriser les points suivants.

- Forme algébrique $x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ d'un nombre complexe.
- Conjugué et module d'un nombre complexe, relation $|z|^2 = z\bar{z}$.
- Forme trigonométrique $r\, e^{i\theta}, r \in \mathbb{R}^{+*}, \theta \in \mathbb{R}$ d'un nombre complexe non nul.
- Arguments d'un nombre complexe non nul. Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique et réciproquement.

- Représentation géométrique des nombres complexes ; affixe d'un point, d'un vecteur.

- Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels.

On se borne ici à des exercices relatifs à ces points. L'étude du trinôme du second degré du point de vue réel est rappelée dans le paragraphe **4.2** .

Exercice 24 (F)**.** *Écrire*

$$\frac{3-2i}{2+5i} \qquad \textit{et} \qquad \left(\frac{1+i}{i}\right)^3$$

sous la forme $a+ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 25 (F)**.** *Soit :*

$$z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}.$$

a) Écrire z *sous forme algébrique :* $z = a+ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *puis sous forme trigonométrique :* $z = r\, e^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}^{+*}, \theta \in \mathbb{R}$.

b) Calculer z^3.

Exercice 26 (F)**.** *Trouver les nombres complexes* z *tels que :*

$$z^2 + 10z + 169 = 0.$$

Exercice 27 (F)**.** *Déterminer les nombres complexes* z *tels que* $z^2 = i$, *sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.*

4 Inégalités, trinôme du second degré réel

4.1 Inégalités et inéquations : méthodes élémentaires

La manipulation des inégalités n'est pas difficile, mais demande du soin. Il est en particulier essentiel :

- de bien maîtriser les règles des signes ;

- de réaliser que le signe d'une expression est d'autant plus facile à étudier qu'elle est factorisée.

Exercice 28 (F)**.** *Quels sont les réels* x *tels que*

$$f(x) = (x^2-3)\,(1-\sqrt{x})\,(|x|-6)\,(|4x+3|)$$

soit > 0.

Exercice 29 ((F))**.** *a) Quel ensemble décrivent respectivement* x^2 *et* x^3 *lorsque* x *décrit l'intervalle* $[-2,+\infty[$ *?*

b) Quel ensemble décrit $1/x$ *lorsque* x *décrit* $]-4,5] \setminus \{0\}$ *?*

c) Quels ensembles décrivent respectivement $x+y$, xy, x/y *lorsque* $x > -2$ *et* $y \geq 2$ *?*

d) Même question qu'en b) avec $x > -2$ *et* $0 < y \leq 3$.

Exercice 30 ((F,*) L'inégalité arithmético-géométrique pour deux réels positifs). *Montrer, pour a et b dans $\mathbb{R}$:*

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$$

avec égalité si et seulement si $a = b$.

Soient x et y des réels ≥ 0. En appliquant l'inégalité précédente à $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$, on obtient

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2},$$

avec égalité si et seulement si $x = y$.

Notons enfin que l'on peut reformuler le résultat précédent des deux manières suivantes :

- la somme de deux réels positifs x et y de produit p donné est minimale lorsque $x = y = \sqrt{p}$;

- le produit de deux réels positifs x et y de somme donnée S est maximal lorsque $x = y = S/2$.

Exercice 31 ((F) Rectangles de périmètre donné d'aire maximale). *On se donne un rectangle de demi-périmètre p. Montrer que son aire est majorée par $p^2/4$. Pour quels rectangles y a-t-il égalité ?*

Exercice 32 (F). *Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}^+$. Prouver :*

$$\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}.$$

Dans l'exercice ci-après, on commencera par dire pour quelles valeurs de x les expressions étudiées sont définies.

Exercice 33 (I). *Selon la valeur de x, déterminer le signe de :*

a) $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3}$,

b) $g(x) = \sqrt{|x-1|} - \sqrt{|2x-3|}$,

c) $h(x) = \ln(x+3) + \ln(x+2) - \ln(x+11)$.

4.2 Le trinôme du second degré réel

Soient a, b, c trois nombres réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Si $a = 0$, f est une fonction affine. Si $a \neq 0$, on dit que f est un polynôme de degré 2 ou encore un *trinôme du second degré*.

Forme canonique

L'étude du signe et des racines du trinôme du second degré repose sous la *mise sous forme canonique*. Rappelons ce dont il s'agit. Soient en effet a, b, c dans $\mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Posons :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Pour x dans $\mathbb{C}$, on peut écrire :

$$(2) \qquad ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right).$$

On a ainsi :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}.$$

Racines du trinôme et factorisation

On est ainsi conduit à la discussion classique de l'équation

$$(3) \qquad f(x) = 0 :$$

- si $\Delta = 0$, (3) admet une unique racine dans $\mathbb{C}$ (dite « double »), à savoir

$$\frac{-b}{2a};$$

cette racine est réelle.

- si $\Delta > 0$, (3) admet deux racines réelles distinctes, à savoir :

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a};$$

- si $\Delta < 0$, (3) admet deux racines complexes non réelles et *conjuguées*

Notons x_1 et x_2 les racines de (3) dans $\mathbb{C}$ si $\Delta \neq 0$. Pour $\Delta = 0$, notons $x_1 = x_2$ la racine double de (3). La mise sous forme canonique entraîne la factorisation :

$$(4) \qquad \forall x \in \mathbb{C}, \qquad f(x) = a(x - x_1)\ (x - x_2).$$

Exemple

Soit θ dans $\mathbb{R}$. Le trinôme

$$x^2 - 2\cos(\theta)x + 1$$

a pour discriminant

$$\Delta = 4\left(\cos^2(\theta) - 1\right) = -4\sin^2(\theta) = (2i\sin(\theta))^2\,.$$

Les racines de ce trinôme sont donc $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$; Δ est nul si et seulement si $\sin(\theta) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si θ est dans $\pi\mathbb{Z}$. Dans tous les cas, on a :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad x^2 - 2\cos(\theta)x + 1 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}).$$

Exercice 34 (F)**.** *Pour m dans $\mathbb{R}$, soit p_m le trinôme du second degré :*

$$p_m \ : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + mx + 1.$$

Déterminer, selon la valeur de m, le nombre de racines réelles de p_m.

Exercice 35 (I). *Soit a dans $\mathbb{R}$. Déterminer le nombre de réels x tels que :*

$$x^3 - x = a^3 - a.$$

Somme et produit des racines

Revenons à l'équation (3) et notons-en x_1 et x_2 les racines, avec $x_1 = x_2$ si $\Delta = 0$. On a alors :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ainsi, la lecture des coefficients d'une équation de degré 2 donne immédiatement la somme et le produit des racines.

Exercice 36 (I). *Soient x_1 et x_2 les deux racines (éventuellement confondues) du trinôme*

$$p \ : x \mapsto ax^2 + bx + c.$$

Calculer $x_1^2 + x_2^2$ en fonction de a, b, c.

Si on sait que l'équation (3) admet deux racines réelles (éventuellement confondues) x_1 et x_2, on détermine immédiatement leur signe avec les formules (5). En effet, le signe du produit c/a permet de dire si x_1 et x_2 sont ou non de même signe. Dans le cas où x_1 et x_2 sont de même signe, c'est-à-dire si $c/a > 0$, le signe commun de x_1 et x_2 est celui de leur somme $-b/a$.

Notons enfin que si $c/a < 0$, alors

$$\delta = b^2 - 4ac = a^2 \left(\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} \right) > 0.$$

La condition $c/a < 0$ est donc équivalente à l'existence de deux racines réelles non nulles de signes opposés.

Signe du trinôme pour les valeurs réelles de la variable

Supposons, pour fixer les idées :

$$a > 0.$$

La mise sous forme canonique (2) et la factorisation (4) entraînent la discussion suivante.

- Si $\Delta > 0$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) > 0.$$

- Si $\Delta = 0$ et si x_1 est la racine double de (3), alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}, \qquad f(x) > 0.$$

- Si $\Delta < 0$ et si on note $x_1 < x_2$ les deux racines réelles de (3), alors :

$$\forall x \in \left]-\infty, x_1\right[\cup \left]x_2, +\infty\right[, \qquad f(x) > 0.$$

$$\forall x \in \left]x_1, x_2\right[, \qquad f(x) < 0.$$

La discussion est analogue si $a < 0$.

Exercice 37 (F)**.** *Pour m dans $\mathbb{R}$, soit p_m le trinôme du second degré :*

$$p_m \ : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + mx + 1.$$

Déterminer, selon la valeur de m et les valeurs du réel x, le signe de $f(x)$.

5 Dérivation

L'invention du calcul différentiel et intégral au dix-septième siècle est un tournant de l'histoire des mathématiques. Les outils ainsi créés ont permis d'étudier avec beaucoup d'efficacité des problèmes aussi divers que le calcul des aires et des longueurs, la détermination des tangentes à une courbe, les problèmes d'extremum, la cinématique, la mécanique.

La mise en place du calcul différentiel et intégral des fonctions d'une variable réelle est le coeur du programme d'analyse de première année d' ECS. Le cours correspondant est traité en suivant l'approche mise au point par les mathématiciens du dix-neuvième siècle (notamment Cauchy et Weierstrass) : l'analyse y est reprise à son début (nombres réels, suites), les théorèmes sont complètement démontrés à partir de ce point de départ. Il est cependant très souhaitable de disposer préalablement d'une solide maîtrise pratique du sujet. C'est le but de ce chapitre et des deux suivants.

5.1 Calcul des dérivées

Il est essentiel de bien connaître les règles de calcul sur les dérivées : dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient, ainsi que les dérivées des fonctions usuelles (polynômes, racine carrée, logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques), d'une composée de la forme $\exp(f), \ln f, \sqrt{f}$ ou :

$$x \mapsto f(ax+b).$$

Dérivée d'une composée

La formule donnant la dérivée d'une composée, très utile, généralise les règles évoquées ci-dessus. Elle ne figure pas explicitement au programme de Terminale et vous sera démontrée en première année d' ECS. Vous pouvez l'admettre et l'utiliser dès maintenant.

Théorème 1 (Dérivée d'une composée)**.** *Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$ notés respectivement I et J. Supposons que l'on puisse composer f et g, c'est-à-dire que, pour tout x de I, $f(x)$ appartienne à J, que f soit dérivable en x et g en $f(x)$. Soit $g \circ f$ la fonction définie sur I par*

$$\forall x \in I, \qquad g \circ f(x) = g\left(f(x)\right).$$

Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \qquad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

Exercice 38 (F)**.** *Pour chacune des fonctions ci-après, déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée.*

- $a : x \mapsto x^3 \cos(5x+1)$,
- $b : x \mapsto e^{\cos x}$,
- $c : x \mapsto x \ln(x)$,
- $d : x \mapsto \ln\left(e^x + 1\right)$,

- $e : x \mapsto e^{x^3+2x^2+3x+4}$,
- $f : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$,
- $g : x \mapsto \ln(e^x + \sin(x))$.
- $h : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$,
- $i : x \mapsto \dfrac{\cos(2x)}{x^2-2}$,
- $j : x \mapsto \ln\left(\cos(2x)\right)$,
- $k : x \mapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$,
- $\ell : x \mapsto \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$,
- $m : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$,

5.2 Tangente à un graphe

La dérivée a plusieurs interprétations intéressantes. Du point de vue géométrique, le nombre $f'(a)$ représente la pente de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a. Précisément, si f est dérivable, l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a est :

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Exercice 39 ((F). Une propriété des paraboles)**.** *Soient a un réel non nul, f la fonction :*

$$x \in \mathbb{R} \ \mapsto \ ax^2,$$

x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$.

Montrer que la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ est parallèle à la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses x_1 et x_2.

Exercice 40 (I)**.** *a) Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, x_0 un réel tel que $f'(x_0) \neq 0$. Calculer l'abscisse du point x_1 en lequel la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 recoupe l'axe (Ox).*

b) On suppose que a est un réel positif, que f est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 - a.$$

Avec les notations précédentes, vérifier :

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right).$$

Nous retrouverons cette relation un peu plus loin, lors du calcul de $\sqrt{2}$ par la méthode de Newton (exercice 42). La forme générale de la méthode de Newton repose sur le calcul de a).

5.3 Applications de la dérivation

On rappelle ici deux techniques très importantes liées à la dérivation.

5.3.1 Étude de fonctions, résolution d'équations

L'étude des fonctions est une technique simple mais très importante. Elle est fondée sur le lien entre monotonie de f sur un intervalle et signe de f', lien admis en classe de Terminale mais qui sera démontré en première année d' ECS.

Une application immédiate est la détermination du nombre de solutions d'une équation et le positionnement des racines. La lecture du tableau de variations d'une fonction dérivable f permet en effet de déterminer le nombre de solutions d'une équation de la forme

$$f(x) = \lambda, \qquad \lambda \in R.$$

Exemple *Une étude d'équation*

Soit p un nombre réel. Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation

$$(E_p) \qquad x^5 - 5x = p\ ?$$

On pose, pour x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x^5 - 5x.$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 5\left(x^4 - 1\right) = 5(x^2-1)(x^2+1) = 5(x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Cette inégalité rend apparent le signe de $f'(x)$. La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$, strictement décroissante sur $[-1,1]$, strictement croissante sur $[1,+\infty[$. En utilisant les relations

$$f(-1) = 4 = -f(1), \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

le tableau de variations donne les résultats ci-après :

- si $p < -4$, l'équation (E_p) admet une unique solution réelle, qui appartient à $]-\infty,-1]$;
- si $p \in]-4,4[$, l'équation (E_p) admet trois solutions réelles : une dans $]-\infty,-1[$, une dans $]-1,1[$, une dans $]1,+\infty[$;
- si $p > 4$, l'équation (E_p) admet une unique solution réelle, qui appartient à $[1,+\infty[$;
- si $p = -4$ ou $p = 4$, l'équation (E_p) possède deux solutions distinctes.

Le graphe de la fonction f et le graphe des droites d'équation $y = p$ pour $p = -7,-4,0,4,7$ permettent de visualiser ce résultat.

Exercice 41 ((D,∗). Calcul d'une racine carrée par la méthode de Newton). *Soit a dans $\mathbb{R}^{+*}$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par son premier terme u_0, élément de $\mathbb{R}^{+*}$ et par la relation de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) = f_a(u_n)$$

où la fonction f_a est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_a(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

a) Étudier f_a et en représenter le graphe.

b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Montrer les inégalités :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_a(x) \geq \sqrt{a},$$

$$\forall x \in [\sqrt{a}, +\infty[, \qquad f_a(x) \leq x.$$

En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

d) Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = {v_n}^2.$$

e) Calculer v_n en fonction de n (cf exercice 3).

f) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq (u_1 + \sqrt{a}) \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

Conclure que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\sqrt{a}$.

g) On prend $a = 2$, $u_0 = 1$. Représenter graphiquement la fonction f_2 et les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Écrire l'inégalité de la question e) dans ce cas. Comment choisir n pour obtenir une valeur approchée à 10^{-5} près de $\sqrt{2}$? Faire les calculs correspondants.

Remarque *Méthode de Newton*

L'algorithme précédent remonte à l'Antiquité (Héron). Il a été généralisé au dix-septième siècle par Newton et Raphson en une méthode donnant des approximations rapidement convergentes des solutions d'une équation $f(x) = 0$. Décrivons-en brièvement le principe. On se propose de calculer numériquement une racine ℓ de l'équation dont on connaît une première approximation. On considère une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

le point de départ x_0 étant choisi aussi près de ℓ que le permet l'estimation dont on dispose. On montre que si x_0 est assez près de ℓ, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ. La convergence est de plus très rapide. Dans l'exercice précédent, les questions f) et g) montrent que l'erreur $|u_n - \sqrt{a}|$ est majorée par une quantité de la forme

$$e_n = Ck^{2^n}$$

avec $C > 0$ et $k < 1$. Ce type d'estimation vaut en fait pour toute fonction. Comme

$$e_{n+1} = \frac{{e_n}^2}{C},$$

on voit qu'à peu de choses près, le nombre de décimales correctes double à chaque étape (« convergence quadratique »). La preuve du résultat général est accessible en première année d' ECS.

La méthode de Newton a été considérablement généralisée au vingtième siècle. Elle garde une grande importance en analyse.

5.3.2 Démonstration d'inégalités

Une inégalité peut se traduire par la positivité d'une certaine fonction f. L'étude de f permet souvent d'accéder au signe de f via l'étude de ses variations.

Exemple $(*)$ *Une inégalité souvent utile*

Démontrons l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x \geq x + 1,$$

que vous aurez souvent l'occasion d'utiliser. On pose, pour x dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

L'inégalité proposée s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \geq 0.$$

Il s'agit donc de déterminer le signe de f. La connaissance des variations de f permet de répondre à cette question. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = e^x - 1.$$

Puisque exp est strictement croissante, f' est < 0 sur $\mathbb{R}^{-*}$, nulle en 0, > 0 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par suite, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle est donc partout supérieure ou égale à $f(0) = 0$. C'est le résultat désiré. Interprétation de l'inégalité établie : le graphe de la fonction exp est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

La preuve précédente montre en outre que, pour $x \neq 0$:

$$e^x > x + 1.$$

Une remarque pour conclure. Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut réécrire l'inégalité précédente sous la forme :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad \ln(1 + x) \leq x,$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$. Posant $y = x + 1$, on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \ln(y) \leq y - 1$$

avec égalité si et seulement si $y = 1$. Interprétation géométrique : le graphe de la fonction ln est au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 42 ((F,$*$). Une inégalité utile)**.** *Montrer l'inégalité :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \sin x \leq x.$$

Faire un dessin illustrant cette inégalité.

Exercice 43 (F)**.** *Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer le maximum de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Exercice 44 (F)**.** *Soit λ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Déterminer le minimum de la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_\lambda(x) = \frac{\lambda x^2}{2} - \ln(x).$$

6 Calcul des limites

6.1 Introduction et premiers exemples

L'analyse asymptotique a pour but de comparer les fonctions au voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ ou de $+\infty$. Elle joue un rôle essentiel dans beaucoup d'applications (par exemple l'analyse d'algorithmes en informatique). Au cours des deux années d' ECS, vous étudierez un certain nombre de méthodes pour aborder ce type de problème. On se limite ici à quelques techniques simples de calcul des limites : méthodes directes (opérations, encadrement), utilisation du taux de variation, croissances comparées usuelles, mise en facteur du terme prépondérant, utilisation de la forme exponentielle.

Les exercices ci-après utilisent uniquement des techniques étudiées en Terminale (opérations algébriques sur les limites, produit d'une fonction bornée par une fonction tendant vers 0, encadrement).

Exercice 45 (F)**.** *Trouver la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :*

$$a : x \mapsto e^{-\sqrt{x}}, \qquad b : x \mapsto \frac{x+7}{4x+3}, \qquad c : x \mapsto \frac{x^2+5}{x^3-1}, \qquad d : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x},$$

$$e : x \mapsto \cos(x^2)\, e^{-x}, \qquad f : x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}, \qquad g : x \mapsto (2+\sin(x))\, x.$$

Exercice 46 (F)**.** *Trouver la limite en $+\infty$ de :*

$$x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x}.$$

Exercice 47 (I)**.** *Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit :*

$$f(x) = \sin(1/x).$$

a) Tracer sommairement le graphe de f. Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

b) La fonction f a-t-elle une limite en 0 ?

c) Quelle est la limite de $xf(x)$ lorsque x tend vers 0 ?

6.2 Utilisation de taux d'accroissement

La définition de la dérivée donne la relation :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a).$$

A priori, lorsque x tend vers a,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

est une forme indéterminée (numérateur et dénominateur tendent vers 0) ; la relation précédente permet de lever l'indétermination. Exemples importants :

$$\frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1, \quad \frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Bien entendu, cette méthode est limitée et artificielle. L'étude des *développements limités* vous fournira des outils généraux très efficaces pour régler ce type de problème.

Exercice 48 (F)**.** *En utilisant la dérivation, trouver les limites suivantes :*

- $\dfrac{\cos x - 1}{x}$, $\dfrac{\sin(5x)}{x}$, $\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)}$ *lorsque* x *tend vers* 0,
- $\dfrac{\ln x}{x-1}$ *lorsque* x *tend vers* 1.

6.3 Mise en facteur du terme prépondérant

Pour déterminer la limite d'une forme indéterminée, une méthode essentielle est la *mise en facteur du terme prépondérant*.

Exemples

1. $(*)$ *Quotient de deux polynômes*

   Soient P et Q deux polynômes. Pour x dans $\mathbb{R}$, on écrit :

   $$P(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i, \quad Q(x) = \sum_{j=0}^{q} b_j x^j.$$

   On suppose a_p et b_q non nuls (afin que P et Q soient de degrés respectifs p et q). Déterminons la limite quand x tend vers $+\infty$ de

   $$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

   On factorise par les termes prépondérants x^p et x^q. Il vient :

   $$F(x) = x^{p-q}\ \frac{a_p + \frac{a_{p-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^p}}{b_q + \frac{b_{q-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^q}}.$$

   On obtient

   $$F(x) = x^{p-q}\, U(x), \quad \text{avec : } U(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a_p}{b_q}.$$

   La limite cherchée est donc :

   - 0 si $q > p$,
   - $\dfrac{a_p}{b_q} = \dfrac{a_p}{b_p}$ si $p = q$,
   - $+\infty$ si $p > q$ et $\dfrac{a_p}{b_q}$ >0, $-\infty$ si $p > q$ et $\dfrac{a_p}{b_q} < 0$.

   En résumé, la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est celle du quotient

   $$\frac{a_p x^p}{b_q x^q}$$

   des termes prépondérants des polynômes.

2. Déterminons la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{x^2 + x^3 + 3\ln(x) + e^{-x}}{x^4 + \cos x - 1}$$

en $+\infty$. Le terme prépondérant du dénominateur $d(x)$ est x^4, celui du numérateur $n(x)$ est x^3. On écrit donc :

$$d(x) = x^4 \left(1 + \frac{\cos x}{x^4} - \frac{1}{x^4}\right) = x^4 u(x)$$

où $u(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. De même :

$$n(x) = x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x^2}\right) = x^3 v(x)$$

où $v(x)$ tend vers 1 en $+\infty$. Il vient

$$f(x) = \frac{1}{x}\,\frac{u(x)}{v(x)}.$$

Ainsi $f(x)$ est le produit de $1/x$ qui tend vers $+\infty$ par $u(x)/v(x)$ qui tend vers 1. Au total :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Noter que la démonstration fournit un renseignement plus précis :

$$xf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Autrement dit, $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ « à peu près comme $1/x$ ». La notion de fonctions équivalentes permettra de donner un sens précis à cette formulation un peu vague.

3. Soient α et β deux réels tels que

$$|\beta| < |\alpha|,$$

A et B deux réels non nuls. Posons

$$u_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

Pour n tel que $u_n \neq 0$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha \frac{A + B\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{A + B\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}}$$

Le réel $\gamma = \beta/\alpha$ est de valeur absolue strictement inférieure à 1. La suite $(\gamma^n)_{n\geq 0}$ tend donc vers 0. On en déduit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

On notera que pour la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$, on a :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 49 (F)**.** *Trouver la limite en $+\infty$ de*

$$f(x) = \frac{50x + x\ln x}{x\ln(x) + 3}, \quad g(x) = \frac{e^{-x} + \sqrt{x} + e^x + \cos x}{x^{20} + 2x^{2013}}, \quad h(x) = \frac{e^x - 1}{x^6 + 2e^x + e^{x/2}},$$

$$i(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}, \quad j(x) = \exp\left(-3\sqrt{x} + x - \ln(x^2+1) + \cos(x)\right),$$

$$k(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right).$$

7 Intégration

7.1 Rappels

L'intégration a été introduite en classe de Terminale. Le calcul des intégrales est limité, à ce niveau, à celui des primitives. Il est essentiel de connaître les points suivants.

- Le lien entre dérivation et intégration, c'est-à-dire le fait que si f est une fonction continue sur I et a un point de I, alors la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur I de dérivée f.

- Les primitives usuelles. À la liste vue en Terminale (polynômes, exp, cos, sin) s'ajoutent les fonctions puissances non entières : pour α réel différent de -1, les primitives de

$$x \mapsto x^\alpha$$

sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Le cas $\alpha = -1$ est vraiment spécifique : les primitives de

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les

$$x \mapsto \ln(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- La *linéarité de l'intégrale*, c'est-à-dire les relations d'usage constant :

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\ ;$$

$$\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- La possibilité d'intégrer les inégalités, c'est-à-dire, si $a < b$, l'implication :

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t) \leq g(t) \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cas particulier souvent utile : la forme intégrale de l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire la majoration

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t,$$

que l'on obtient en intégrant l'encadrement

$$\forall t \in [a,b], \qquad -|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|.$$

Exercice 50 (F). *Calculer les primitives des fonctions suivantes :*

1. $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(3x) + 2\sin(5x)$,
2. $x \in \mathbb{R} \mapsto 6\, e^{-4x}$,
3. $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x\, e^{e^x}$,
4. $x \in]1, +\infty[\mapsto \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x}$, *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 51 (F). *En utilisant les relations obtenues dans l'exemple 2 du paragraphe* **2.3** *et dans l'exercice 31, calculer :*

$$I = \int_1^3 \frac{dt}{t(t+1)}, \qquad J = \int_2^5 \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}.$$

Exercice 52 (F). *Pour* p *et* q *dans* $\mathbb{N}^*$*, calculer :*

$$\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)\, dt\ , \quad \int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\, dt.$$

Exercice 53 (I). *a) Soit pour* x *dans* $]0, +\infty[$ *:*

$$G(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Calculer la dérivée de G*. On pourra poser :*

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

et exprimer G *en fonction de* F*.*

b) Soient f *une fonction continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*,* u *et* v *deux fonctions dérivables de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Calculer la dérivée de la fonction* G *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt.$$

7.2 L'intégration par parties

La technique dite d'*intégration par parties* est une conséquence simple du lien entre primitive et intégrale et de la formule donnant la dérivation d'un produit. Elle est donc accessible en classe de Terminale. Elle ne figure pas dans les attendus du programme officiel mais enrichit considérablement les possibilités de calcul. Avant de l'énoncer, introduisons une notation. Si w est une fonction définie sur I, on pose :

$$w(b) - w(a) = [w(t)]_a^b\,.$$

Théorème 2 (Intégration par parties). *Soient* u *et* v *deux fonctions définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*, dérivables sur* I*, à dérivées continues,* a *et* b *deux points de* I*. Alors :*

$$(2) \qquad \int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt = [u(t)\, v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt.$$

Preuve. On sait que :

$$(uv)' = uv' + u'v.$$

On a donc :

$$(1) \qquad \int_a^b \left(u(t)\, v'(t) + u'(t)\, v(t)\right)\, \mathrm{d}t = u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a).$$

La formule désirée se déduit aisément de ce calcul et de la linéarité de l'intégrale.

Quel est l'intérêt de la formule d'intégration par parties ? Le crochet $[u(t)v(t)]_a^b$ se calcule immédiatement. Dès que le calcul des primitives de $u'v$ est plus simple que celui des primitives de uv', la formule (2) apporte un gain.

Exemples

1. Soit x dans $\mathbb{R}$. Calculons

$$\int_0^x t\cos(t)\, \mathrm{d}t.$$

Le point important est que

$$u\ : t \mapsto t$$

se dérive en la fonction constante égale à 1 alors que cos se primitive en sin. Posant $v = \sin$, le produit $u'v = \sin$ s'intègre donc immédiatement, contrairement à la fonction initiale uv'. En appliquant la formule précédente, il vient :

$$\int_0^x u(t)\ v'(t)\, \mathrm{d}t = [t\sin t]_0^x - \int_0^x \sin t\, \mathrm{d}t.$$

On a :

$$[t\sin t]_0^x = x\sin(x), \qquad \int_0^x \sin t\, \mathrm{d}t = [-\cos t]_0^x = -\cos x + 1.$$

Au total :

$$\int_0^x t\ \cos(t)\, \mathrm{d}t = x\sin x + \cos x - 1.$$

2. $(*)$ *Primitives de* ln

Soit x dans $\mathbb{R}^{+*}$. Calculons :

$$\int_1^x \ln(t)\, \mathrm{d}t.$$

On pose ici, pour t dans $\mathbb{R}^{+*}$:

$$u(t) = \ln(t), \qquad v(t) = t.$$

Il vient :

$$u'(t) = \frac{1}{t}, \qquad v'(t) = 1.$$

Le produit $u'v$ est la fonction constante égale à 1. L'intégration par parties donne :

$$\int_1^x \ln(t)\, \mathrm{d}t = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = x\ln(x) - x + 1.$$

Conséquence : la fonction

$$x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x \ln(x) - x$$

est l'unique primitive de ln définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prenant la valeur -1 en $x = 1$; les primitives de ln sur ce même intervalle sont les

$$x \longmapsto x \ln(x) - x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 54 (F)**.** *Calculer :*

$$\int_0^x t^2 \ \sin(t) \, dt.$$

Plus généralement, donner une méthode permettant de calculer les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto p(x) \ \sin(x)$ *ou* $x \mapsto p(x) \cos(x)$ *où* p *est un polynôme.*

Exercice 55 (F)**.** *Calculer :*

$$\int_0^x t \, e^t \, dt, \qquad \int_0^x t^2 \, e^t \, dt.$$

Plus généralement, donner une méthode permettant de calculer les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto p(x) \ e^x$ *où* p *est un polynôme.*

Exercice 56 (I)**.** *Calculer, si* a *et* b *sont deux réels non nuls et* x *un réel :*

$$f(x) = \int_0^x e^{at} \cos(bt) \, dt.$$

On intègrera successivement deux fois par parties.

8 Réponses ou indications

1. L'hérédité vient de la relation :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4n + 4\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0{}^{(2^n)}$.

3. c) Si n est dans $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = a\,(u_n - \ell) = av_n.$$

d) Pour n dans $\mathbb{N}$:

$$u_n = \ell + a^n\,(u_0 - \ell)\,.$$

Si $u_0 = \ell$, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est constante. Sinon, elle converge vers ℓ pour $|a| < 1$, est non bornée donc non convergente si $|a| > 1$. Pour $a = -1$, $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont constantes associées à des valeurs différentes, $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge.

4. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, soit $f^{[n]} = f \circ f \cdots \circ f$ (n itérations). Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{[n]}(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + ncx^2}}.$$

6. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

7. L'égalité $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} = \dfrac{p}{q}$ entraîne $2^q = 3^p$. Contradiction car le premier membre est pair, le second impair (ou à cause de l'unicité de décomposition d'un entier naturel non nul en produit de facteurs premiers).

8. La réponse est n^2.

9. On a $S_n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$ et, puisque $|r| < 1$, $r^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

10. Soit A_k l'événement : « on obtient pour la première fois un 6 au k-ième lancer ». On a :

$$P(A_k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

La probabilité d'obtenir un 6 avant le n-ième lancer est donc

$$\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n}.$$

Cette probabilité tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui est conforme à l'intuition.

11. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}.$$

Comme $1/(2n+2)$ et $1/(2n+1)$ sont tous deux majorés par $1/2n$, la quantité précédente est négative et $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

13. En dérivant la relation :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Il reste à multiplier par x.

Pour $|x| < 1$, cette quantité tend vers

$$\frac{1}{(1-x)^2}.$$

14. Reprenons les notations de l'exercice 11. L'espérance de X est

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

On obtient une expression sans symbole $\sum$ en substituant $5/6$ à x dans l'exercice précédent. La limite en $+\infty$ est 6, ce qui est intuitif.

15. a) On utilise :

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

Le résultat est $\ln(n+1) - \ln(2)$. La limite est $+\infty$.

b) On utilise :

$$\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}\right) = \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k)$$
$$= \ln(k+1) - \ln(k) - (\ln(k) - \ln(k-1)).$$

Le résultat est :

$$\ln(n+1) - \ln(2) - (\ln(n) - \ln(1)) = -\ln 2 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

La limite est $-\ln(2)$.

16. On vérifie que le triplet

$$(a,b,c) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

convient (pour le voir, tout réduire au même dénominateur.

La somme proposée n'est autre que :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}.$$

La limite est $\frac{1}{4}$.

18.a) On a : $A_n = 4^{\alpha_n}$ où :

$$\alpha_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)=\frac{n(2n^2+3n+7)}{6}.$$

b) On a : $B_n = \frac{n+4}{3}$.

19. On a :

$$C_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k}.\frac{k+1}{k}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\times\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}.$$

La limite de $(C_n)_{n\geq 2}$ est $\frac{1}{2}$.

20. Le résultat est $(n+1)!-1$.

21. On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

22. En utilisant :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2-1,\qquad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0,$$

il vient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

23. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \cos(3x)=4\,\cos(x)^3-3\cos(x).$$

24. a) La réponse est $\frac{-4-19i}{29}$.

b) La réponse est $-2-2i$.

25. a) On a :

$$z=\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}=-1+i\sqrt{3}=2\exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right).$$

b) La forme trigonométrique montre que $z^3 = 8$.

26. Les solutions sont

$$-5 + 12i, \quad -5 - 12i.$$

27. Les racines carrées de i dans $\mathbb{C}$ sont

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et : } -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} = \exp\left(i\frac{5\pi}{4}\right).$$

28. L'expression est définie si et seulement si $x \geq 0$. Pour $x \geq 0$, on a

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in [0, 1[\cup[\sqrt{3}, 6].$$

29. a) Le réel x^2 décrit $\mathbb{R}^+$. Le réel x^3 décrit $[-8, +\infty[$. (Noter que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, décroissante sur $\mathbb{R}^-$, alors que $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$).

b) Le réel $1/x$ décrit $]-\infty, -1/4[\cup[1/5, +\infty[$. (Noter que la fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$).

c) Le réel $x + y$ décrit $\mathbb{R}^{+*}$. Les réels xy et x/y décrivent $\mathbb{R}$. (Faire attention aux signes).

d) Le réel $x + y$ décrit $]-2, +\infty]$. Le réel xy décrit $[-6, +\infty[$. Le réel x/y décrit $\mathbb{R}$.

30. Il suffit d'écrire :

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2.$$

31. Notons x et $y = p - x$ les longueurs des côtés. L'aire du rectangle est

$$x\,(p - x)\,,$$

maximale lorsque $x = p/2$ d'après le commentaire précédant l'exercice, c'est-à-dire lorsque le rectangle est un carré.

32. Quitte à échanger a et b, on peut supposer $a \geq b$. Puisque les deux membres sont ≥ 0, l'inégalité proposée équivaut à :

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \leq a - b,$$

c'est-à-dire à :

$$a + b - 2\sqrt{ab} \leq a - b, \quad \text{i.e. } 2b \leq 2\sqrt{ab},$$

ce qui est vrai puisque $a \geq b$.

33. a) On a $f(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [3/2, 2]$.

b) On a $g(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [4/3, 2]$. (Discuter trois cas selon les signes de $x - 1$ et $2x - 3$).

c) On a $h(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 1$.

34. Si $m \in]-2, 2[$, p_m n'admet aucune racine réelle. Si $m \in]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$, p_m admet deux racines réelles. Si m vaut 2 ou -2, p_m a une racine réelle double.

35. On a

$$x^3 - x = a^3 - a \Longleftrightarrow (x - a)\,(x^2 + ax + a^2 - 1) = 0.$$

Le trinôme $x^2 + ax + a^2 - 1$ a pour discriminant

$$4 - 3a^2.$$

Le nombre de racines du trinôme est donc $0, 1$, ou 2 selon que $|a|$ est strictement supérieur, égal, ou strictement inférieur à $2/\sqrt{3}$.

D'autre part, a est racine du trinôme si et seulement si $a^2 = 1/3$, c'est-à-dire $a = \pm\sqrt{1/3}$.

Ainsi , si $|a| > \sqrt{3}/2$, l'équation admet a pour seule racine. Si $a = \pm 2/\sqrt{3}$ ou $a = \pm 1/\sqrt{3}$, l'équation admet deux racines dans $\mathbb{R}$. Dans les autres cas, l'équation admet trois racines.

36. On a :

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}.$$

38. Les ensembles de définition sont laissés au lecteur. Les expressions des dérivées sont données par les formules suivantes (sur des ensembles à préciser).

$$a'(x) = 3x^2\cos(5x+1) - 15x^3\sin(5x+1),\ b'(x) = -\sin x\ e^{\cos x},\ c'(x) = \ln(x) + 1,$$

$$d'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1},\ e'(x) = (3x^2 + 4x + 3)e^{x^3+2x^2+3x+4},\ f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}e^{\sqrt{x^2+x+1}},$$

$$g'(x) = \frac{e^x + \cos(2x)}{e^x + \sin x},\ h'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2-1)^2},\ i'(x) = \frac{-2(x^2-2)\sin(2x) - 2x\cos x}{(x^2-2)^2},$$

$$j'(x) = \frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)} = -2\tan(2x),\ k'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{(\sin x)^2},\ \ell'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$m'(x) = \frac{1}{x^2-1},\ \text{(utiliser } \ln(\sqrt{u}) = \tfrac{1}{2}\ln(u)\text{)}.$$

39. La tangente au point d'abscisse $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ a pour pente

$$2a\frac{x_1 + x_2}{2} = a\,(x_1 + x_2)\,.$$

La corde joignant les points d'abscisses x_1 et x_2 du graphe a pour pente :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a\,(x_1 + x_2)\,.$$

Les pentes sont égales, les tangentes sont parallèles.

40. a) La tangente au graphe au point d'abscisse x_0 a pour équation :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Elle coupe l'axe (Ox) au point $(x_1, 0)$, x_1 étant déterminé par :

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

soit encore :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

41. a) Il suffit de remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_a(x) \in \mathbb{R}^{+*}.$$

b) D'abord, pour $x > 0$:

$$f_a(x) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0.$$

Ensuite, pour $x \geq \sqrt{a}$,

$$f_a(x) - x = \frac{1}{2x}\left(a - x^2\right) \leq 0.$$

d) On a donc, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, 2^n est pair, d'où :

$$\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n} \geq 0.$$

On a d'autre part, grâce à la croissance de $(u_n)_{n\geq 1}$, la majoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \leq u_1.$$

L'inégalité demandée s'en déduit.

42. Étudier

$$x \longmapsto \sin(x) - x.$$

Le graphe est au-dessous de sa tangente en 0.

43. On a, pour x dans $\mathbb{R}^+$:

$$f_n'(x) = e^{-x}x^{n-1}\left(n - x\right).$$

La fonction f_n est croissante sur $[0, n]$, décroissante sur $[n, +\infty]$. Elle atteint son maximum en n et ce maximum vaut $(n/e)^n$.

44. Le minimum est atteint pour $x = 1/\sqrt{\lambda}$ et vaut

$$\frac{1}{2}\left(1 + \ln(\lambda)\right).$$

45. Dans l'ordre, les réponses sont 0, 1/4, 0, 0 (produit d'une fonction bornée et d'une fonction tendant vers 0), 0 (même argument que le précédent), 0 (poser $y = \ln(x)$ et noter que y tend vers $+\infty$ avec x), $+\infty$ (minorer $2 + \sin x$ par 1).

46. La réponse est 1 (grâce à l'encadrement

$$\frac{x-1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$$

et au théorème des gendarmes).

47. a) La limite de f en $+\infty$ est 0 (car $1/x$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et $\sin(y)$ tend vers 0 lorsque y tend vers 0).

b) La fonction f n'a pas de limite en 0. On peut le justifier en notant, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $x_n = 1/n\pi$ et en remarquant que $(x_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0 alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(x_n) = (-1)^n,$$

ce qui montre que la suite $(f(x_n))_{n\geq 1}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Il est recommandé de tracer le graphe de f.

c) Le produit d'une fonction bornée (ici $x \mapsto \sin(1/x)$) et d'une fonction tendant vers 0 (ici $x \mapsto x$) tend vers 0.

48. Les réponses sont $0, 5, 1/2, 1$. Pour la troisième, on utilise les relations :

$$\frac{\ln(1+2x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2, \qquad \frac{\sin(4x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 4.$$

49. Les réponses sont :

- 1 (factoriser le terme prépondérant $x\ln(x)$ dans le numérateur et le dénominateur) ;

- $+\infty$ (factoriser le terme prépondérant e^x dans le numérateur, le terme prépondérant x^{2013} dans le dénominateur) ;

- $1/2$ (factoriser le terme prépondérant e^x dans le numérateur et le dénominateur) ;

- 1 (factoriser le terme prépondérant $\ln(x)$ dans le numérateur et le dénominateur) ;

- $+\infty$ (factoriser le terme prépondérant x dans $\ln(j(x))$) ;

- $\frac{1}{2}$ (utiliser la quantité conjuguée puis factoriser par $\sqrt{x}$).

50. Les trois premières réponses sont :

$$x \mapsto \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{2\cos(5x)}{5} + C, \quad x \mapsto -\frac{3e^{-4x}}{2} + C, \quad x \mapsto e^{e^x} + C.$$

Pour la dernière, il faut discuter. Pour $\alpha = -1$, les primitives sont les

$$x \longmapsto \ln(\ln(x)) + C.$$

Pour $\alpha \neq -1$, ce sont les

$$x \longmapsto \frac{(\ln x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

51. Réponses : $\ln(3/2)$, $\frac{1}{2}\ln(35/32)$.

52. Les deux intégrales sont nulles. Montrons le pour la première. On écrit :

$$\cos(pt)\cos(qt) = \frac{1}{2}\left(\cos((p+q)t) + \cos((p-q)t)\right).$$

On intégre cette égalité sur $[0, 2\pi]$ et on utilise la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^{2\pi} \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

53. a) On écrit :

$$\forall x > 0,\ G(x) = F(2x) - F(x),$$

puis

$$\forall x > 0,\ G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{\sin(2x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(2x) - \sin(x)}{x}.$$

b) On généralise le calcul précédent. Il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

54. Pour un polynôme réel p, on a :

$$\int_0^x p(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = [-p(t)\cos(t)]_0^x + \int_0^x p'(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si p est de degré d, p' est de degré $d-1$. On peut donc calculer l'intégrale en effectuant d intégrations par parties consécutives.

56. On intègre une première fois par parties :

$$f(x) = \left[\frac{1}{b}e^{at}\sin(bt)\right]_0^x - \int_0^x \frac{a}{b}e^{at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{ax}\sin(bx)}{b} - \int_0^x \frac{a}{b}e^{at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t.$$

On intègre une seconde fois par parties :

$$\int_0^x e^{at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t = \left[e^{at}\frac{-\cos(bt)}{b}\right]_0^x + \int_0^x \frac{a}{b}e^{at}\cos(bt)\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant ce calcul, on obtient la valeur de

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) f(x)$$

à l'aide des deux crochets.